Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana
Dipartimento formazione e apprendimento

SUPSI

LAVORO DI DIPLOMA DI

SANJA KOMAZEC

MASTER OF ARTS IN SECONDARY EDUCATION

ANNO ACCADEMICO 2011/2012

L'USO DI DIVERSE RAPPRESENTAZIONI SEMIOTICHE NEI PRIMI APPROCCI ALL'ALGEBRA

RELATORE

SILVIA SBARAGLI

Sommario

9. Allegati

Allegato A1: Attività 1

Allegato A3: Raccolta dati (Attività 1 - III media)

Allegato A4: Trascrizione dell'ntervista (Attività 1 - III media)

Allegato A5: Raccolta dati (Attività 1 - II media)

Allegato A6: Trascrizione dell'ntervista (Attività 1 - II media)

Allegato B1: Attività 2

Allegato B2: Raccolta dati (Attività 2 - III media)

Allegato B3: Trascrizione dell'intervista (Attività 2 - III media)

Allegato B4: Protocollo di N. (Attività 2 - III media)

Allegato B5: Protocollo di E. (Attività 2 - III media)

Allegato B6: Protocollo di M. (Attività 2- III media)

Allegato B7: Raccolta dati (Attività 2 - II media)

Allegato B8: Trascrizione dell'intervista (Attività 2 - II media)

Allegato B9: Protocollo di R. (Attività 2 - II media)

Allegato B10: Protocollo di S. (Attività 2 - II media)

Allegato B11: Protocollo di C. (Attività 2 - II media)

1. Introduzione

Il continuo scambio di idee ed esperienze con gli insegnanti, formatori e con gli allievi in questi due anni di formazione ha portato ad una crescente attenzione dedicata alle problematiche legate all'apprendimento dell'algebra e ad uno stile di insegnamento meccanico e privo di buon senso. Maggior parte dei libri d'algebra inizia sviluppando una gran mole di meccanismi proponendo dei problemi artificiosi e già risolti che non seguono il corso naturale del pensiero dell'allievo e non mettono affatto in evidenza le possibilità dell'algebra. Occorre sempre molto tempo prima che lo studente ne intravveda l'utilità. Può darsi che egli impari a semplificare, ad esempio, l'espressione algebrica $4(x + 3) – 2(1 - x)$, senza rendersi conto in quali circostanze dovrebbe sentire il bisogno di effettuare questo calcolo. Un apprendimento della matematica, e in particolare dell'algebra, limitato alla considerazione di una sola rappresentazione dell'oggetto risulta forzato, incompleto e sterile, e può rivelarsi didatticamente pericoloso e causare la formazione di misconcezioni nella mente degli allievi. La formazione di un concetto richiede un progressivo avvicinamento e una sequenza di fasi diverse. Espressione verbale, espressione grafica e iconica, scritture abbreviate, ovvero l'espressione simbolica, sono possibili tappe di un procedere logico di una conveniente e auspicabile anticipazione dei contenuti essenziali dell'algebra. Questo primo accostamento all'algebra dovrebbe avvenire, in linea con (Sawyer, 1974) in modo intuitivo, senza passare attraverso l'acquisizione di regole.

L'obiettivo di questa ricerca è quello di esaminare il ruolo di diversi registri rappresentativi nei primi approcci all'algebra e mostrare che l'uso di ogni registro rappresentativo coinvolge molti aspetti concettuali: se da un lato risulta essere un'arma formidabile nelle mani dell'insegnante e dell'allievo, è altretanto vero che richede prudenza viste le difficoltà e le possibili limitazioni dimostrate nel campo. In particolare, si cercherà di proporre un'innovazione nell'insegnamento/apprendimento dell'algebra che punti ad un approccio consapevole agli oggetti dell'algebra attraverso una pluralità di rappresentazioni del medesimo oggetto matematico.

I risultati teorici di questa ricerca riguarderanno innanzitutto le pratiche didattiche ed l'individuazione di caratteristiche generali relative a contesti che favoriscono un approccio sensato nell'avvio al pensiero algebrico. Si attendono risultati significativi che possono essere reinvestiti nel campo della formazione dei docenti e costituire il punto di partenza per introdurre una visione sensata dell'algebra nel Piano di formazione della scuola media.

2. Quadro teorico

2.1 L'idea di un approccio naive al linguaggio algebrico

Numerosi studi sulla didattica dell'algebra mostrano che, in generale, il pensiero algebrico non è costruito progressivamente e in parallelo con l'aritmetica ma successivamente ad essa, dando risalto soprattutto ai meccanismi manipolativi ed agli aspetti computazionali. Secondo Malara (1997), le difficoltà che gli allievi incontrano nello studio dell'algebra sono da imputare proprio a questo approccio didattico basato sulla ricerca immediata degli strumenti (le operazioni) per ottenere la risposta (il risultato) nelle varie situazioni.

In (Malara, Navarra, 2003) si ritiene che un approccio anticipato dell'algebra, concepita come linguaggio, possa ridurre tali difficoltà. Tale approccio mira a guidare l'allievo a pensare l'aritmetica algebricamente e sollecita (Doretti, Salomone, 2005) la rappresentazione della situazione stessa stimolando per tappe successive il passaggio dal linguaggio naturale, nel quale sono formulati i problemi, a quello algebrico-formale, in cui si traducono le relazioni che essi contengono (si rappresenta prima di risolvere). In (Doretti, Salomone, 2005) si ipotizza un lungo percorso di preparazione al pensiero algebrico che prevede: l'approccio al codice algebrico realizzato nel passaggio dal linguaggio naturale al linguaggio matematico e viceversa con uso di lettere al posto di numeri; la costruzione collettiva di significati, la consapevolezza delle regole del nuovo linguaggio (sintassi) e necessità di rispettarle; l'abitudine a riflettere, in particolare, sui diversi modi di rappresentare un numero; la rappresentazione e la descrizione delle situazioni problematiche attraverso il linguaggio algebrico; l'approccio all'idea di equazione come uguaglianza tra due modi diversi di rappresentare una stessa quantità.

In linea con Malara e Navarra, Sawyer (1974) sostiene che un primo accostamento all'algebra dovrebbe avvenire in modo intuitivo, senza passare necessariamente attraverso l'acquisizione delle regole. Alcune esperienze didattiche effettuate da Sawyer (1974) mostrano la potenza del metodo visivo in algebra: una volta che l'idea dell'algebra con dei sacchetti e dei sassolini sia stata accettata, le abbreviazioni nella rappresentazione e l'introduzione della lettera x seguono in modo del tutto naturale. Infatti, anche gli antichi devono essere arrivati in modo analogo a concepire l'idea dell'algebra. Gli antichi egizi disegnavano un numero ignoto con un mucchio di sassi e parlavano di esso come del *mucchio*. Ed è proprio attraverso il gioco con dei sacchetti e dei sassolini e le successive formalizzazioni iconiche e algebriche che Sawyer conduce il lettore del libro e vedere le equazioni come un modo abbreviato di registrare il ragionamento.

L'approccio all'algebra sviluppato all'interno del progetto ArAl seguito dall'Università di Modena e Reggio Emilia presta una attenzione sistematica alla pluralità delle rappresentazioni di cui un oggetto è sensibile e mira a portare gli allievi a cogliere come la scelta di una rappresentazione influenzi lo sviluppo delle argomentazioni sull'oggetto rappresentato. La ricerca effettuata in particolare sottolinea come nella risoluzione di problemi verbali algebrici un particolare utilizzo della bilancia a piatti, integrato con un opportuno uso della rappresentazione, possa costituire un approccio favorevole allo sviluppo di schemi prealgebrici negli allievi e possa consentire la coesione del linguaggio naturale e quello iconico e degli operatori formali matematici.

In (Malara, 1997) si traccia una panoramica di un progetto di rinnovamento dell'insegnamento-apprendimento dell'algebra nella scuola media finalizzato a dare significato e motivazione allo studio sia del linguaggio algebrico che degli oggetti dell'algebra. Elemento cardine per lo sviluppo di tale progetto è l'idea di un approccio naive al linguaggio algebrico, centrato sul controllo dei significati delle scritture, che nascono dall'esigenza di codificare e generalizzare relazioni tra elementi in gioco in assegnate situazioni problematiche, e sul confronto di scritture, nate da modi diversi ma equivalenti, di codifica di date relazioni.

2.2 La creazione e lo sviluppo di diverse rappresentazioni semiotiche come simbolo storico di progresso della conoscenza

Il riferimento ai diversi registri rappresentativi nell'espressione matematica compare spesso nella recente ricerca in didattica della matematica. È opportuno ricordare che nel corso dei secoli l'algebra si è evoluta attraverso una sequenza di fasi nelle quali l'uso dei diversi registri semiotici, elaborati in diverse comunità d'uso, in diversi momenti storici e sulla base di intenzioni e di necessità diverse, ha avuto una notevole importanza (Bagni, 2007). Ogni rappresentazione nasce infatti da una pratica sociale ed è proprio attraverso tale pratica sociale che avviene il collegamento stretto a quello che viene chiamato *oggetto matematico* (Bagni, 2007). I registri rappresentativi, come nota l'autore, non hanno soltanto un ruolo pratico, ma hanno anche una dimensione sociale e storica che determina, almeno in parte, il modo con cui i registri stessi ci influenzano quando li impieghiamo.

La speciale situazione epistemologica della matematica conduce a conferire alle rappresentazioni semiotiche un ruolo fondamentale. In primo luogo esse sono il solo modo di accesso agli oggetti matematici, cosa che solleva il problema cognitivo del passaggio dalla rappresentazione di un oggetto ad un'altra dello stesso oggetto (Duval, 2006). A sostegno di questa affermazione, D'Amore (2003) ricorda che ogni concetto matematico è costretto a servirsi di rappresentazioni, dato che non vi sono oggetti da esibire in loro vece o a loro evocazione. Dunque, la concettualizzazione deve passare attraverso registri rappresentativi. Tuttavia, è opportuno affermare con Duval che la distinzione tra un oggetto e la sua rappresentazione è un punto strategico per la sua comprensione. Il coordinamento dei diversi registri rappresentativi di cui il soggetto dispone, secondo Duval (2005), è la condizione per la padronanza della comprensione in quanto essa è la condizione per una differenziazione reale tra gli oggetti matematici e la loro rapresentazione. Del resto, il coordinamento e la varietà dei diversi registri rappresentativi è, per Duval, non solo utile per l'apprendimento, ma addirittura indispensabile. Il funzionamento cognitivo del pensiero umano si rivela inseparabile dall'esistenza di una diversità di registri semiotici di rappresentazione. L'apprendimento o la produzione di una rappresentazione semiotica è inseparabile dall'apprendimento concettuale di un oggetto (noetica). In (D'Amore, 2001) l'autore afferma che la costruzione dei concetti matematici è strettamente dipendente dalla capacità di usare più registri di rappresentazione semiotiche di quei concetti:

- Di rappresentarli in un dato registro.
- Di trattare tali rappresentazioni all'interno di uno stesso registro.
- Di convertire tali rappresentazioni da un dato registro ad un altro.

In questa ottica, l'apprendimento risulta essere condizionato dalla scelta del registro di rappresentazione adottato. Un scelta consapevole dei registri semiotici risulta determinante per la pratica didattica: registri diversi fissano elementi distintivi differenti di uno stesso concetto.

Duval accorda alla conversione (trasformazione di registro) un posto centrale nella acquisizione concettuale di un oggetto matematico: ciò che si chiama concettualizzazione comincia solo quando si mette in moto la coordinazione di due distinti registri di rappresentazione. L'operazione di conversione permette infatti di individuare e definire gli elementi invarianti che costituiscono l'essenza di un concetto.

Recenti studi di D'Amore e Fandiño Pinilla hanno invece evidenziato che la maggior parte delle traformazioni semiotiche messe in atto in ambito algebrico sono trattamenti e non conversioni. Il trattamento può dare luogo a trasformazioni di senso che condizionano in grande misura lo studente (D'Amore, Pinilla, 2007), come del resto confermano le ricerche di Santi (2010), il quale attribuisce il *senso* di un oggetto matematico alla relazione referenziale tra esso e le sue possibili rappresentazioni semiotiche.

Il legame tra registri rappresentativi diversi e dunque tra significanti diversi di uno stesso significato-oggetto relazionale non è sempre visto spontaneo. Alcune indagini proposte in (D’Amore, 1999) confermano la necessità dello studio esplicito della didattica dei diversi registri poiché è prassi abituale, nella pratica didattica, passare da tipi di schemi ad altri dando tutto ciò per scontato. Lo stesso D’Amore (2001), citando Vygotskij, sostiene che anche l’esperienza dimostra che l’insegnamento diretto dei concetti è impossibile e sterile: un insegnante che tenta di fare questo, normalmente non raggiungerà nulla, se non un vuoto verbalismo.

2.3 Il ruolo della visualizzazione

In (Bagni, 2007) viene esaminato il ruolo della visualizzazione in alcuni procedimenti algebrici elementari. L’autore osserva infatti che alcune elementari identità algebriche possono essere utilmente visualizzate ricorrendo all’algebra geometrica greca. L’idea centrale di tale procedimento consiste nel rappresentare dei numeri reali attraverso grandezze geometriche, ad esempio, mediante segmenti. In questo modo, attraverso figure, si possono visualizzare molte operazioni: se due numeri sono identificati da due segmenti, il loro prodotto corrisponde ad un rettangolo avente tali segmenti per dimensione. Il ricorso all’immagine nella dimostrazione delle proposizioni di algebra geometrica offre la possibilità allo studente di accostarsi gradualmente all’astrazione algebrica e rende tali risultati intuitivi e quindi utili dal punto di vista didattico.

Tuttavia, un recente studio di M. Kaldrimidou (1996) ha evidenziato un atteggiamento quasi negativo nei confronti delle rappresentazioni visuali. Negli studenti le rappresentazioni visuali sono spesso di timore e di incertezza. Il contratto didattico sembra attribuire notevole importanza all’espressione algebrica a scapito di quella figurale. I risultati di una simile ricerca analizzata in (Bagni, 2007) concordano qualitativamente con quanto affermato dalla ricercatrice Kaldrimidou. Particolarmente interessante emerge l’ostacolo di una rappresentazione eterogenea rispetto a quella richiesta: la natura algebrica del problema proposto suggerisce o addirittura richiede una risoluzione di tipo algebrico. I due linguaggi, algebrico e geometrico, sono isomorfi, ma il riconoscimento della loro sostanziale equivalenza viene a costituire un ostacolo per l’allievo (Bagni, 2007). La visualizzazione, secondo Bagni (1997), dovrebbe essere considerata come un versatile, preziosissimo punto di partenza e come un indispensabile compagno di strada, nel rispetto dell’auspicabile varietà dei registri rappresentativi.

3. Domande e ipotesi di ricerca

3.1 Le domande di ricerca

Il presente lavoro si articola intorno a cinque domande di ricerca riguardanti l'uso di diversi registri rappresentativi in relazione all'avvio del pensiero algebrico.

D1. Fino a che punto lo studente è disposto ad ammettere che si tratta di registri rappresentativi diversi, ma di uno stesso significato – oggetto relazionale?

D2. Quale registro rappresentativo viene visto dall'allievo in modo più immediato?

D3. Il registro ritenuto più facile per sé stessi è considerato più facile anche per gli altri?

D4. Lo studente riesce a tradurre da un registro all'altro?

D5. La perdita di senso dello stesso oggetto matematico nel passaggio da un registro ad un altro è dovuta soltanto alla conversione, oppure anche al trattamento?

3.2 Le ipotesi di ricerca

I1. I diversi registri di rappresentazione semiotica non sempre portano a cogliere negli studenti lo stesso significato-oggetto relazionale. Ogni rappresentazione sintetizza e offre agli studenti tipi diversi di informazione e si collega ai diversi usi e dunque, a pratiche sociali distinte.

I2. Si ipotizza che i registri figurali e quelli iconici appaiano più concreti e rassicuranti, adderenti all'esempio considerato, in confronto con i registri simbolici e verbali che risultano essere più generali e richiedono una più impegnativa astrazione.

I3. Il registro ritenuto più facile per sé stessi non è considerato necessariamente il più facile anche per gli altri. Vi sono motivi didattici in questo comportamento, spesso legati anche all'immagine della matematica e alle particolari clausole del contratto didattico.

I4. Si ipotizza, in accordo con Duval, che rappresentare un oggetto matematico mediante rappresentazioni differenziate sia una delle attività cognitive più complesse in matematica, spesso trascurate e sottovalutate nell'insegnamento.

I5. Sembra plausibile pensare, in linea con D'Amore, che la perdita di senso dell'oggetto matematico avvenga non soltanto a causa della conversione, ma anche a causa del trattamento. La perdita di senso è da imputare inoltre alla inaccessibilità all'oggetto matematico, nota come paradosso cognitivo di Duval.

4. Metodologie di ricerca

Per rispondere alle domande di ricerca è stata progettata una ricerca-azione con una raccolta di dati di tipo qualitativo e quantitativo. La ricerca è stata condotta in una classe di seconda media di 23 allievi e in una classe di terza media, corso attitudinale, di 17 allievi. I dati conclusivi sono stati raccolti mediante l'elaborazione delle produzioni autonome di allievi (Allegati A3, A5) e in forma strutturata in tabelle (Allegati B2, B7), così da consentire la classificazione delle risposte e il loro confronto in percentuali. In (D'Amore, 2006), l'autore afferma con Duval che:

> ''Non si può sottolineare l'importanza delle descrizioni, nell'acquisizione delle conoscenze scientifiche così come nelle prime tappe degli apprendimenti matematici, senza affrontare un'altra questione fondamentale tanto per la ricerca come per gli insegnanti: l'analisi delle produzioni degli allievi. Giacché è nel quadro dello sviluppo della descrizione che si ottengono le produzioni più personali e le più diversificate, dato che esse possono essere fatte verbalmente o con l'aiuto di un disegno, di schemi […]. In questo caso si tratta, per la ricerca, di una questione metodologica e, per gli insegnanti, d'una questione di diagnostica'' (p. 556).

Alcuni risultati significativi sono stati utilizzati per effettuare le interviste semistrutturate con un numero ridotto di allievi scelti in entrambe le classi. Le interviste, svolte individualmente, sono state condotte col supporto del materiale proposto agli allievi e quello prodotto da essi. Sui dati raccolti è stata effettuata un'analisi distinta per ordine scolastico, al fine di individuare gli aspetti cruciali condivisi dalla stessa categoria di allievi e un'analisi comparativa tra le risposte degli allievi di ordini scolastici differenti.

L'interpretazione integrata, raccolta in forma scritta e orale, è stata poi confrontata con le ricerche di D'Amore (1999), Bagni (2007) e Duval (2006) riguardanti i registri rappresentativi differenti, al fine di fornire un quadro più esaustivo della situazione che si vuole analizzare in questa ricerca. In base a quanto proposto nei lavori di D'Amore (1999), Bagni (2007) e Sawyer (1974), sono state progettate due attività, incentrate sull'uso e sulla conversione e trattamento di vari registri rappresentativi, volte a verificare, o confutare, le ipotesi di questa ricerca.

4.1 Impostazione didattica del progetto d'intervento

L'intervento in classe, che si è protratto per circa due mesi, si è articolato in sei lezioni. Per rispondere alla domande di ricerca è stato necessario limitare il campo di azione e fissare l'attenzione su un opportuno esempio su cui lavorare. Per ottenere qualche risultato significativo, come suggerisce D’Amore (2005), occorre sempre analizzare a priori le clausole del contratto didattico che si presume entreranno in gioco. Si è preferito dunque esplicitare che si trattava di una ricerca extra-scolastica la quale non avrebbe avuto un valore valutativo, invitando gli studenti a produrre protocolli originali e sinceri. Ciò nonostante, emerge chiaramente quella che D’Amore (2005) chiama *l’esigenza della giustificazione formale* di cui si parlerà nell’analisi dei dati.

Per la prima scelta didattica (Allegato A1) si è preso spunto dalle esperienze efettuate da Sawyer (1974), il quale sostiene che un primo accostamento all’algebra dovrebbe avvenire in modo intuitivo, passando per tappe dal registro verbale e simbolico a quello iconico e infine a quello algebrico. Tenendo presente questa traccia, l’intervento proposto nell’attività 1 prevede la lettura di quattro messaggi (che occupavano ciascuno un foglio formato A4 e venivano distribuiti in quattro buste) espressi in quattro diversi registri rappresentativi: verbale, figurale, iconico e algebrico. Nel materiale didattico adottato nella classe di terza media coinvolta nell’esperienza, erano utilizzati, negli anni precedenti, il registro verbale, iconico e quello algebrico, nella sua forma più semplice e neppure uno del registro figurale. Nelle schede adottate nella classe di seconda media nell’anno precedente all’esperienza condotta, comparivano alcuni esempi del registro verbale e quello iconico e neppure uno del registro figurale e algebrico.

È opportuno sottolineare che la scelta dell’attività (la natura dell’esempio) potrebbe modificare il senso ed i risultati dell’indagine poiché la superiorità di un registro semiotico rispetto agli altri dipende sicuramente dal campo in cui ci muoviamo. È indubbio che i diversi sistemi di rappresentazione si collegano all’esperienza spaziale e temporale degli studenti in molti modi. T. Bagni (2007) afferma che

> ‘‘Ogni modalità mediante la quale noi esprimiamo la matematica ha caratteristiche proprie e può sintetizzare tipi diversi di informazione e si collega ai diversi usi, dunque, come notato, a partiche sociali […]. Non avrebbe senso riflettere su degli strumenti senza tener presente i soggetti che li usano ed i motivi che inducono tali soggetti a fare ciò: il ricorso alle varie forme di rappresentazione, dalle più semplici, tradizionali alle più sofisticate, non è infatti neutro rispetto alle abitudini, ai contesti, alle istituzioni culturali e ciò sottolinea l’importanza della dimensione storica e sociologica’’ (p. 84).

Allo scopo di cominciare a dare risposte preliminari ma già significative alle domande di ricerca D1, D2 e D3, sono state poste agli studenti le seguenti domande in forma scritta, tratte in parte da D’Amore (1999).

Prima domanda (volta a verificare se lo studente si accorgeva da solo, senza alcun suggerimento, che si trattava di uno stesso significato): Dopo aver letto i quattro messaggi, che cosa ne pensa? Se lo studente non dichiara che si tratta di quattro significanti diversi dello stesso significato, lo si forza con la

Seconda domanda: Ci sono due buste che contengono lo stesso messaggio? (con la possibilità che lo studente ne veda dapprima due e poi tre o tutti). A questo punto gli si pone la

Terza domanda: Quale consideri il messaggio più chiaro, significativo, leggibile, comprensibile? Spiega le tue motivazioni.

Quarta domanda: Se tu fossi un maestro di III elementare, volendo far si che i tuoi studenti capiscano il messaggio, quale delle quattro buste useresti? Perché? (in questo modo lo studente rivela quel che pensa essere la scelta più plausibile da parte dello giovane studente, o la sua di allora, o la sua di ora (D'Amore, 1999):

> ''[…] scelta che non sempre può esplicitare in modo diretto a causa di alcune clausole del contratto sperimentale che non lo fanno sentire autorizzato a rivelare le sue reali preferenze'' (p. 273).

Quinta domanda: Se volessi inviare il messaggio alla tua professoressa, quale delle quattro buste useresti? Perché?

Sesta domanda: Le quattro buste contengono lo stesso messaggio? Sorpreso? Scegli una delle quattro buste e scopri la statura dell'uomo e di ciascuno dei suoi figli.

Successivamente è stato adottato il metodo delle interviste semistrutturate in un ordine non rigido, lasciando spazio ad eventuali approfondimenti a partire dalle domande sopra elencate. In questo modo è possibile raccogliere molte più informazioni di uno strumento strutturato scritto, in quanto l'intervistatore può avvertire quel che lo studente intende dire, vista la poca disponibilità che qualche volta si manifesta da parte di alcuni studenti a mettere per iscritto opinioni. Tuttavia, è opportuno ricordare con (Coggi, Ricchiardi, 2010) che nell'intervista la presenza fisica dell'intervistatore favorisce nel rispondente di dare di sé un'immagine che ritiene ben accetta dagli altri e può influenzare le risposte con i gesti, la mimica facciale, gli squardi ecc.

Per determinare se gli studenti compiono effettivamente passaggi da un modo di rappresentare ad un altro, è stata proposta una seconda attività (Allegato B1) esaminando una possibile classificazione dei modi di rappresentare il triplo di un numero (verbale, simbolico, iconico). La prima consegna consiste in sei rappresentazioni in cui viene chiesto di proporre una rappresentazione alternativa e originale della rappresentazione proposta. Lo scopo è di far sì che l'allievo sia in grado di osare inventando rappresentazioni diverse per lo stesso concetto; questo consentirà allo studente di effettuare *trattamenti*, ossia di passare da una rappresentazione ad un'altra all'interno dello stesso registro semiotico per lo stesso oggetto matematico, e di effettuare *conversioni* tra una rappresentazione ed un'altra in registri semiotici diversi (Sbaragli, 2005). La seconda parte della consegna consiste in una riflessione sull’eventuale somiglianza e/o equivalenza tra le rappresentazioni proposte e mira ad indagare le abilità degli studenti nel modo di gestire e cogliere i diversi tipi di rappresentazione di una stessa relazione algebrica.

5. Analisi dei risultati

5.1 Il primo studio: quale rappresentazione? (III media – corso attitudinale)

Prima e seconda domanda: Circa 60% degli allievi di terza media coinvolta nella ricerca riconosce spontaneamente nella prima domanda che tutte e 4 le buste contengono lo stesso messaggio. Tale percentuale sale al 69% se si considerano anche le risposte alla seconda domanda.

Terza domanda: Il registro rappresentativo considerato più significativo e comprensibile è quello figurale proposto nella seconda busta e scelto dal 50% degli allievi. Circa 31% degli allievi sceglie il registro verbale. Tra i motivi c'è il fatto che "il primo registro dava più spazio all'immaginazione e alla comprensione", poiché "è tutto scritto, senza calcoli o schizzi". A questo proposito risulta interessante la seguente conversazione avuta con l'allievo A., il quale sceglie il registro proposizionale che risulta essere chiaro e complesso nello stesso tempo:

A.: Il primo messaggio, perché consegna comunque le stesse informazioni.

I.: Però poi hai scritto "anche se in una forma più complessa? "

A.: Eh, perché ci metti un'attimo a trovare le informazioni dalla scritta però.

La sintassi del registro proposizionale a volte appare complessa e i suoi significati concentrati, come afferma D'Amore (1999):

> ''Non solo i simboli matematici, ma anche la stessa lingua comune, quando è usata in matematica, appare piuttosto complessa perché in poche battute deve dare parecchie informazioni'' (p. 253).

Segue il registro simbolico (algebrico) scelto dal 13% degli allievi, mentre soltanto un allievo sceglie il registro iconico "dato che quel disegno rappresenta la situazione è più facile capire il senso del problema invece che leggerlo o doverlo immaginare. "

Quarta domanda: Il registro ritenuto più adatto per un allievo di III elementare è il registro figurale con la netta percentuale del 80%; segue il registro iconico con il 13%, mentre il 7% degli allievi sceglie di utilizzare tutti e quattro registri nel seguente ordine N1, N2, N4 e N3, "perché quelli della terza elementare capiscono meglio la scrittura e poi lo schizzo". La netta differenza fra lo schema ritenuto più comprensibile per sé stessi e quello ritenuto più facile per bambini di III elementare risiede in motivazioni didattiche. Il registro figurale è ritenuto facile per i bambini piccoli "perché semplice e conciso" e "perché per un bambino è più facile capire dei concetti con dei disegni, quindi non testi e grafici”. Tra i motivi che fanno scegliere ad alcuni allievi il registro iconico per i bambini più piccoli, c’è il fatto che “loro riescono a capire meglio le cose raffigurate con i disegni” e perché il registro iconico “è più preciso poiché nel disegno non si capisce se i piedini del figlio sono davvero i piedini oppure la frangia del papà”. Questa informazione, emersa durante l’intervista, è da considerarsi una prima informazione parassita, in quanto evidentemente influenza la scelta dell’allievo, e dimostra, come affermato in D’Amore (1999) che

> ‘‘il tipo di significante porta con sé non solo il significato che l’adulto voleva indurre, ma altre informazioni parassite non volute né immaginate’’ (p. 276).

Un altro motivo di chi, dopo aver scelto il registro figurale come più comprensibile per gli allievi di III elementare, poi non lo sceglie per sé stesso, è così esemplificabile durante l’intervista: “Forse perché non siamo più abituati a vedere questi messaggi [indica il registro figurale], mentre alle elementari c’erano più disegni”. In questa scelta vi sono dunque non solo i motivi didattici, ma anche il cambiamento dell’immagine della matematica che accompagna il passaggio tra la scuola elementare e la scuola media, dovuto da particolari clausole del contratto didattico.

Quinta domanda: Il registro scelto per la professoressa è quello algebrico con il 53%, “perché il suo contenuto è più matematico”, “è una rappresentazione matematichese” e “essendo più complessa, forse per un professore è l’opposto e capirebbe meglio”. Trovando difficile tale registro, nessuno lo propone per gli studenti di III elementare. C’è dunque coerenza in tale comportamento. Seguono, nell’ordine: il registro iconico con il 20%, il registro figurale con il 13% ed il registro verbale con il 13%.

Sesta domanda: Nella risoluzione del problema il 73% degli allievi mantiene il registro ritenuto più chiaro e comprensibile nella terza domanda, il 20% degli allievi decide di abbandonare la scelta del registro figurale e il 7% degli allievi abbandona invece la scelta del registro algebrico a scapito di quello iconico.

5.2 Il primo studio: quale rappresentazione? (II media)

Le risposte analizzate in seguito si riferiscono alle domande poste in 5.1. I dati raccolti (Allegato A5) possono essere d’aiuto nella interpretazione dei risultati. A puro scopo illustrativo, viene data la tabella dei risultati percentuali in entrambe le classi, in cui i registri rappresentativi compaiono nell’ordine proposto nell’Attività 1 (Allegato A1).

A = percentuale di riconoscimento dello stesso significato; B = percentuale di scelta della facilità per sé stessi; C = percentuale di scelta della facilità per bambini di terza elementare; D = percentuale di scelta della facilità per la docente di matematica.

Tabella 1. Percentuali di scelta di vari registri

	A	B	1	2	3	4	C	1	2	3	4	D	1	2	3	4
II media	35		20	45	10	25		5	90	0	5		25	0	10	60
III media	69		31	50	6	13		7	80	13	0		13	13	20	53

Prima e seconda domanda: Il 15% degli studenti di seconda media coinvolta nella ricerca riconosce spontaneamente, nella prima domanda, che si tratta di quattro significanti dello stesso significato; degli altri 85%, circa 40% lo capisce dopo la seconda domanda tesa a verificare se lo studente vede dapprima due schemi che dicono la stessa cosa e poi eventualmente tre o tutti. Alla seconda domanda, i messaggi maggiormente scelti come equisignificanti sono ancora il messaggio 2 e il messaggio 3 con la percentuale del 50%, forse per la loro forma grafica simile e non per il messaggio relazionale contenuto. I motivi di questa scelta sono così sintetizzabili: “La 2 e la 3 sono circa uguali, una fa vedere le immagini e l’altra spiega con le lettere”, mentre un’allieva afferma che “non ci sono due buste che contengono lo stesso messaggio, ma in due buste [il messaggio 2 e 3] c’è lo stesso disegno però raffigurato in modo diverso”. Il 30% degli studenti conferma di nuovo che tutti e quattro i messaggi sono equisignificanti; il 5% nota lo stesso messaggio nel registro figurale e in quello algebrico; il 5% sceglie i primi tre messaggi come equisignificanti mentre il 10% risponde alla seconda domanda in modo affermativo senza ulteriori spiegazioni.

Terza domanda: Il registro ritenuto più facile è il registro figurale con la percentuale del 45%; seguono, nell’ordine: il registro algebrico con il 25%, il registro verbale con il 20% e il registro iconico con il 10%. Tra i motivi che fanno scegliere ad alcuni ragazzi il registro figurale come quello più comprensibile, c’è il fatto che “il messaggio due ti fa vedere lo schema ed è molto chiaro” e inoltre “ci sono le misure e i disegni per capire meglio”. Un allievo afferma che il messaggio più chiaro è “il due, perché si! Mi piace”. Chi invece sceglie il registro verbale afferma che esso “dà più informazioni” e “spiega molto bene la situazione”. Il registro iconico scelto dal 10% degli studenti risulta essere quello “più ordinato”.

Quarta domanda: Il registro ritenuto più adatto per gli allievi di III elementare è il registro figurale con la netta percentuale del 90%; seguono il registro verbale con il 5%, il registro algebrico con il

5% e il registro iconico con il 0%. I motivi di chi sceglie il registro figurale per i bambini piccoli sono legati alla chiarezza e alla semplicita dovuta dalla “consegna con dei disegnini”, ma anche alle scelte didattiche “perché al giorno di oggi si impara con i disegnini o filmati”. C’è invece chi sceglie il registro figurale perché riuscirebbe a spiegare meglio la situazione con i disegni. Il registro iconico, considerato chiaro solo dal 5% degli allievi, non è mai scelto per usi didattici con bambini piccoli. Ancora una volta c’è estrema coerenza in questo comportamento.

Quinta domanda: Il 60% degli studenti sceglie per la sua docente il registro algebrico il quale risulta “più complicato”, “più matematico” e “da adulti”. Il registro verbale è scelto dal 25% degli studenti perché “è il più matematico e sembra un problema”. Dalla ricerca di D’Amore (1999) risulta essere chiaro che

> ‘‘per molti allievi il registro rappresentativo proposizionale si applica solo come testo, come proposta di attività, come se fosse meta-argomentativo […], sembra essere il testo, la descrizione, il compito’’ (p. 227).

Il registro iconico viene scelto per la docente dal 10% degli allievi perché “più esplicito”, mentre nessuno sceglie il registro figurale considerato piuttosto come un “modo per i bambini”.

Sesta domanda: Nella risoluzione del problema il 55% degli studenti usa il messaggio figurale; seguono: il registro algebrico con il 20%; il registro verbale con il 15%, mentre ancora una volta il registro iconico non incontra molte simpatie e viene scelto soltanto dal 5% degli allievi.

5.3 Il secondo studio: la trasformazione di rappresentazioni semiotiche dello stesso oggetto matematico (III attitudinale)

Le analisi effettuate si riferiscono ai protocolli prodotti dagli allievi e alle interviste effettuate in classe nella lezione successiva allo svolgimento dell’attività. Ciascuna delle situazioni semiotiche proposte è, citando Duval (2003), il significante *a valle* di uno stesso significato *a monte.* Per una lettura più comprensibile, si consiglia di consultare l’Allegato B2, l’Allegato B3 e alcuni protocolli significativi riportati negli Allegati B4, B5 e B6.

Situazione 1: Ricordi la storia di Biancaneve e i sette nani? Mammolo aveva un anno in più rispetto a Cucciolo e un anno in meno rispetto a Pisolo?

Il 56,25% degli studenti coinvolti nella ricerca sceglie la conversione dal registro verbale a quello algebrico perché “spiega di più”. Il registro figurale viene scelto dal 25% degli studenti; segue il registro iconico scelto dal 12,5%, mentre soltanto 6,25% sceglie una rappresentazione mista attraverso il registro iconico-figurale. A proposito del registro algebrico maggiormente scelto, è opportuno ricordare che, nel corso dell’intervista, a causa di alcune clausole del contratto didattico, gli allievi spesso scelgono quelle rappresentazioni che ritengono essere le attese dell'insegnante. È significativa dunque la motivazione dell'allievo A. riguardo la motivazione della scelta del registro algebrico: "L'ho usato perché è quello che stiamo facendo ora e so che a lei piacerebbe vedere che l'abbiamo capito".

È interessante osservare che nessuno sceglie il trattamento all'interno del registro verbale proposto nella Situazione 1. È piuttosto evidente che immaginarsi la situazione descritta del problema e rappresentare tale immagine risulta essere più complicato di quanto possa apparire. Di fatto, i quattro allievi intervistati dichiarano di trovarsi in difficoltà di fronte alla Situazione 1, poiché "in italiano certe parole è difficile da capire e spiegare […]. Se devi stare a leggere è un pò diverso", mentre la rappresentazione algebrica "salta subito all'occhio". Un'allieva rimane molto confusa di fronte alla Situazione 1: "Perché c'erano le immagini e i nomi e non sapevo come fare, come rappresentarlo", mentre gli altri cinque messaggi sono risultati diversi e "più matematici". La difficoltà di immaginare la scena è dovuta inoltre dall'essenza dei dati numerici: "Lo avevo capito ma non sapevo come rappresentarlo perché non potevo dire le date, cioè non potevi dire che uno ha un anno".

È chiarissimo, per molti allievi, come del resto confermano le ricerche di D'Amore (1999), che il registro rappresentativo proposizionale si applica solo come testo, come proposta di attività, e non come una rappresentazione alternativa della situazione in questione.

Situazione 2: $(n-1)+n+(n+1)$

Il 56,25% degli studenti sceglie la conversione dal registro algebrico a quello figurale; seguono in ordine: il registro iconico con il 25%, il registro algebrico-figurale con il 12,5% e il registro verbale-figurale con il 6,25%. Interessante è l'affermazione in Bagni (1997) secondo la quale la natura algebrica del problema suggerisce o addirittura richiede un'impostazione risolutiva di tipo algebrico. Questa affermazione è riferibile a due allieve (il 12,5% degli studenti conivolti nella ricerca) le quali hanno optato per la risoluzione analitica giungendo così alla espressione semplificata, perché la situazione proposta è "più matematica, più un calcolo, un'espressione e quindi ho cercato di risolverla". È il caso dei protocolli di E. (fig. 1) e di N. (fig. 2).

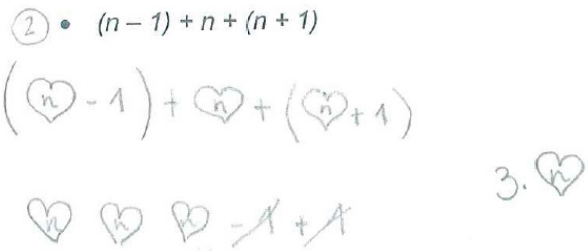


Figura 1

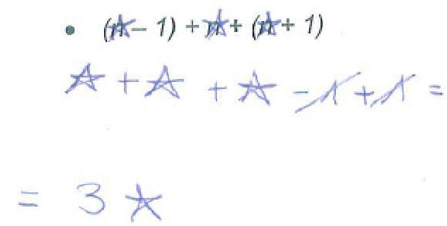


Figura 2

Interessante è il confronto con la ricerca di Bagni (1997) la quale ha evidenziato che l'allievo si sente portato da una clausola del contratto didattico a risolvere il problema assegnato in modo da incontrare l'approvazione metodologica dell'insegnante. Il seguente protocollo dell'allieva L. (fig. 3) è particolarmente interessante per la presenza di due rappresentazioni semiotiche: la prima, quella figurale, è realistica, e rientra quindi nelle figure allegoriche; nella seconda rappresentazione L. fa uso della lingua naturale ed è unica a ricorrere a questo tipo di rappresentazione.

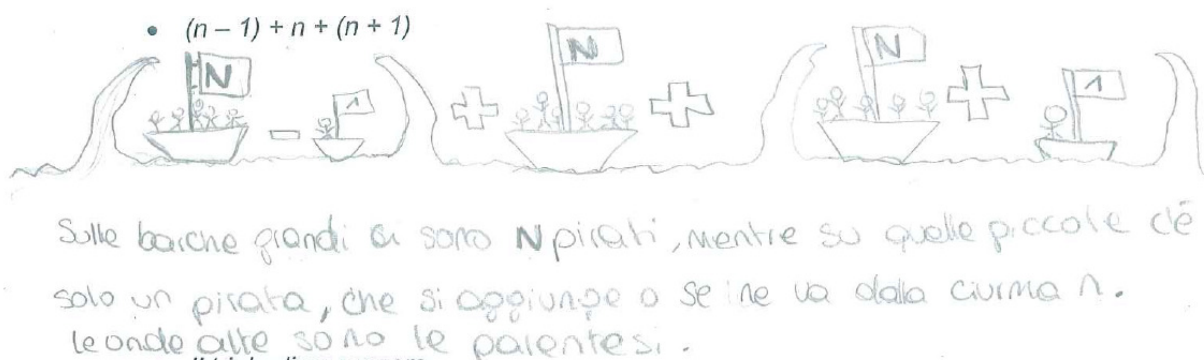


Figura 3

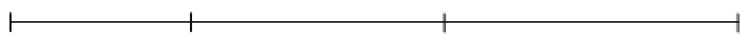
Vale la pena di notare che quasi la totalità di allievi che hanno scelto il registro figurale (il 68,75% se si considerano anche le due rappresentazioni miste) fa riferimento alle situazioni realistiche (sacchettini, macchine, camion, fantasma, uomo nero che sta per l'incognita, cuoricini, omini, barche, ecc.). Ciò potrebbe portare ad una prima considerazione confermata in D'Amore (2005), secondo la quale lo studente sembra sentire maggiormente il bisogno di una rappresentazione realistica della situazione con figure allegoriche, soprattutto nel caso di situazioni non affrontate e che reputa difficili. È il caso dell'espressione algebrica $(n-1)+n+(n+1)$ proposta prima di affrontare il campo delle equazioni e del calcolo letterale.

Situazione 3: Il triplo di un numero

Il 56,25% degli studenti passa dalla rappresentazione verbale a quella figurale; segue la conversione nel registro algebrico con il 37,5%, mentre appare difficoltosa la conversione nel registro iconico scelta dal 6,25% degli studenti. Nessuno invece effettua il trattamento all'interno del registro verbale proposto.

Situazione 4: $3 \cdot n$

Il 31,25% degli studenti effettua il trattamento all'interno del registro algebrico proposto. La stessa percentuale sceglie la conversione nel registro verbale con *il triplo di un numero*. Segue il registro figurale scelto dal 25%, il registro iconico con il 6,25% e il registro algebrico-figurale con il 6,25%.

Situazione 5: 

Il registro maggiormente scelto nella conversione dal registro iconico è il registro verbale scelto dal 43,75%. Il registro algebrico viene scelto dal 31,25%. Seguono il registro figurale con il 18,75% e il registro verbale-figurale con il 6,25%. Il registro iconico ancora una volta non incontra nessuna simpatia.

Situazione 6: La somma di tre numeri consecutivi

Il 43,75% sceglie la conversione dal registro verbale a quello algebrico; segue il registro iconico scelto dal 37,5%; il registro algebrico-iconico con il 12,5% e il registro figurale con il 6,25%. Ancora una volta nessuno ricorre al trattamento all'interno del registro verbale proposto.

5.3.1 Rappresentazioni equisignificanti

Alla domanda *Quali rappresentazioni riportano lo stesso messaggio, lo stesso significato?* soltanto 18,75% risponde spontaneamente che tutte le rappresentazioni riportano lo stesso messaggio [tale percentuale sale al 25% se si considerano le risposte alla seconda domanda], mentre il 6,25% vede l'equivalenza in "tutte tranne l'ultima". È da notare, però, che le motivazioni di questa risposta nei casi intervistati sono legate ad una qualche vaga consapevolezza che "il protagonista è sempre il numero 3", e non ad una vera e propria consapevolezza dello stesso oggetto matematico proposto. Degli altri 75%, circa 91,7% riconosce l'equivalenza nella Situazione 3 e 4; il 66,7% vede lo stesso messaggio nella Situazione 5 e 6; l'equivalenza tra la Situazione 1 e 2 viene vista dal 33,3%, mentre circa il 16,7% riconosce l'equivalenza nella Situazione 2, 5 e 6.

5.3.2 L'attribuzione di sensi diversi a diverse rappresentazioni semiotiche

Particolarmente interessante emerge l'ostacolo nel vedere l'equivalenza tra la Situazione 2 e la Situazione 3: le due rappresentazioni eterogenee, una algebrica e l'altra verbale, sono isomorfe, ma il riconoscimento della loro sostanziale equivalenza risulta essere molto difficoltosa, in particolare dopo la conversione in un altro registro. In nessuno dei casi intervistati gli allievi hanno accettato che il senso della rappresentazione semiotica $3n$, ottenuta per l'ultima dopo le trasformazioni semiotiche effettuate, coincidesse con il senso dell'oggetto matematico di partenza $(n-1)+n+(n+1)$, rappresentato nella Situazione 2.

La perplessità dell'allievo D. (fig. 4 e 5) riguarda il fatto che "c'è sempre il 3 che si ripete", però nella rappresentazione del lancio di un uccellino (gioco virtuale) il quale in seguito si divide in 3, "non sono più 3 uccellini uguali". Dopo alcune sollecitazioni, D. effettua il trattamento all'interno del registro algebrico $(n-1)+n+(n+1)$, ma non accetta che la rappresentazione algebrica di partenza possa coincidere con *il triplo di un numero,* "perché prima della semplificazione erano diversi [...]. È la stessa cosa, però non proprio". È dunque la trasformazione semiotica di trattamento che dà o no un certo senso. Per ulteriori dettagli si veda la trascrizione dell'intervista (Allegato B3, pag. 9-12).

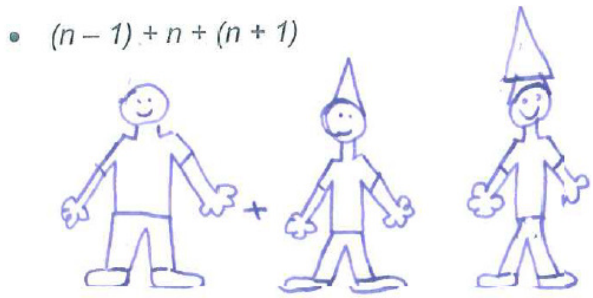


Figura 4

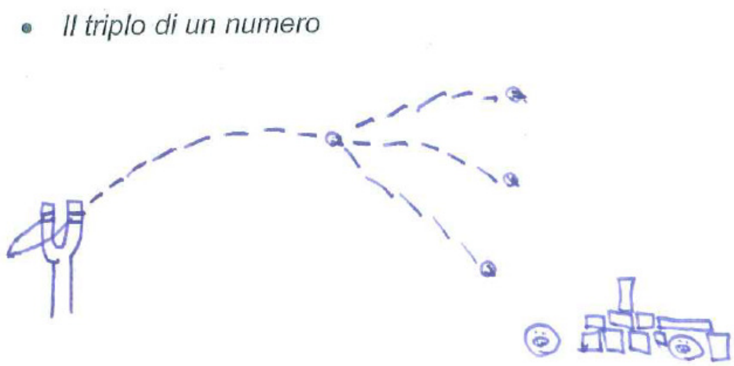


Figura 5

Riassumo in seguito le principali perplessità denunciate durante l'intervista e nella discussione finale con l'intera classe:

- L'equivalenza tra la rappresentazione algebrica (Situazione 2) e quella verbale (Situazione 3) è visibile soltanto dopo la risoluzione analitica.
- Non si tratta di una equivalenza vera e propria poiché prima della semplificazione analitica le due rappresentazioni riportano comunque due messaggi diversi.
- È soltanto la risoluzione algebrica che porta a vedere la sostanziale equivalenza tra le due situazioni, quindi l'ipotesi non risulta essere convincente.

Dalle motivazione espresse emerge come la presenza del segno di moltiplicazione nella rappresentazione algebrica $3n$, *obbliga* gli allievi a cercare un senso in quegli oggetti matematici nei quali compaia il termine *moltiplicazione:* di fatto*,* quasi la totalità degli allievi riconosce spontaneamente l'equivalenza tra la rappresentazione algebrica $3n$ e quella proposizionale (il triplo di un numero).

Come confermato in D’Amore (2006):

> ‘‘L’uso di trasformazioni semiotiche spinge a volte a modificare sostanziali della descrizione delle caratterisctiche dell’oggetto matematico, divenendo una descrizione puramente formale, ottenuta con pratiche semiotiche sì condivise, ma che negano un accesso all’oggetto rappresentato o, meglio, ne negano la conservazione del senso’’ (p. 557).

Inoltre, non è detto che la perdita del senso, come sostengono D’Amore (2006) e Santi (2010), avvenga solo a causa della conversione: nell’esempio analizzato, la perdita del senso è avvenuta a causa di un trattamento (il passaggio da $(n-1)+n+(n+1)$ a $3n$) e a causa di una conversione della proposizione verbale (il triplo di un numero) nella rappresentazione algebrica $3n$. Leggermente diversa è la posizione di Duval (2006), secondo il quale il problema cognitivo cruciale sta nella conversione:

> ‘‘A partire da una rappresentazione d’arrivo non si ritrova necessariamente la rappresentazione di partenza, e le operazioni per ritornare a una delle rappresentazioni di partenza possibili non sono uguali a quelle che hanno permesso la conversione diretta’’ (p. 23).

Lo stesso autore afferma che il riconoscimento del medesimo oggetto rappresentato risulta dalla messa in corrispondenza discriminativa tra unità costitutive dei contenuti. Così, in linea con Duval, nella messa in corrispondenza tra la Situazione 2 e la Situazione 3, risulterebbe fondamentale discriminare rispettivamente:

- Nel contenuto proposizionale la denominazione *il triplo*.
- Nel contenuto dell’espressione algebrica (prima della sua trasformazione per trattamento) la denominazione “n” e la denominazione “$(n-1)$”.

5.3.3 L’affinità tra alcune rappresentazioni semiotiche proposte

Alla domanda *Quali rappresentazioni risultano essere più affini, simili tra di loro?* il 75% sceglie la Situazione 3 e 4. Tra i motivi c’è il fatto che “la 3 e la 4, anche se sono schematizzate o scritte, si capisce subito che è la stessa cosa” e ancora perché “la 3 e la 4 rappresentano un numero che deve essere moltiplicato per 3”. Il 31,25% riconosce l’affinità nella Situzione 5 e 6 perché “fanno la stessa somma’’ e “perché ho disegnato la 6 come la 5”. La somiglianza tra la Situazione 2 e 4 viene vista dal 12,5% “perché le ho disegnate uguali ed è sempre una cosa che si ripete 3 volte”. Non si tratta quindi di una vera e propria consapevolezza della corrispondenza tra la Situazione 2 e 4, ma di una vaga somiglianza legata al ripetersi di *qualcosa* 3 volte nella rappresentazione figurale (fig. 4 e 5) che funge da quella che Duval (2006) chiama *rappresentazione intermedia*. Il 6,25% vede simili la Situazione 1 e 2 “perché la conclusione algebrica è la stessa” e la stessa percentuale opta invece per la somiglianza tra la Situazione 1 e 5.

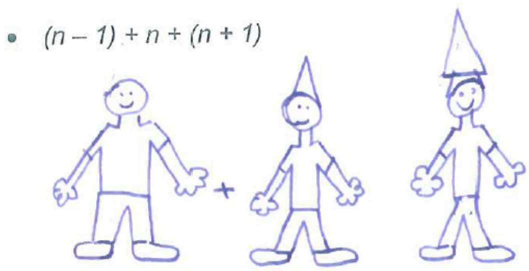


Figura 4

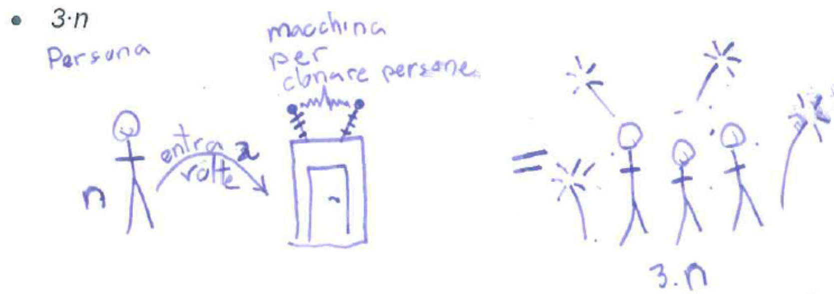


Figura 6

I primi risultati mostrano che diversi tipi di conversioni tra rappresentazioni dello stesso oggetto matematico sono trattati in maniera completamente differente. A questo proposito sembra opportuno ricordare con Duval (2006) la differenza tra una situazione nella quale si può avere accesso agli oggetti stessi sia direttamente sia mediante strumenti, e una situazione nella quale l’oggetto studiato è inaccessibile al di fuori di rappresentazioni dipendenti unicamente da un’attività semiotica, come in matematica. I processi cognitivi che permettono di riconoscere uno stesso oggetto in rappresentazioni diverse non possono essere i medisimi nelle due situazioni. La giustapposizione di sei rappresentazioni possibili del triplo di un numero nell’attività proposta illustra bene la complessità del problema.

Il punto di partenza di una conversione sembra influenzare in modo importante la prestazione degli studenti anche se le situazioni proposte fanno capo alla medesima relazione. Risulta difficile però stabilire in questa ricerca, per la natura dell’attività, un legame significativo tra il tipo di rappresentazione proposta e quella scelta dallo studente. Di fatto, le motivazioni che riguardano la rappresentazione scelta dagli studenti sono spesso legate al desiderio di essere originali e creativi, e non al bisogno di interpretare la rappresentazione di partenza.

5.4 Il secondo studio: la trasformazione di rappresentazione semiotiche dello stesso oggetto matematico (II media)

L'attività 2 è stata proposta a 18 allievi di una classe seconda, i quali, fino al momento dell'indagine, hanno avuto un approccio molto intuitivo al calcolo letterale, costruito in linea con Sawyer (1974), attraverso il gioco con i sacchetti e sassolini e un esempio significativo sull'altezza del padre e dei due figli gemelli (Allegato A1). Il dato più interessante, che in seguito verrà preso in considerazione per la discussione, riguarda l'uso spontaneo del registro algebrico che sembra essere quello convincente e affidabile, anche se mai affrontato esplicitamente. Da questo punto di vista la presenta ricerca richiede una più dettagliata analisi e apre la strada a futuri sviluppi nei quali l'accostamento all'algebra proposto in Sawyer (1974) potrebbe risultare un ottimo veicolo nell'attribuzione di senso nell'ambito algebrico. Per una lettura più comprensibile si vedano alcuni protocolli significativi (Allegati B9, B10, B11), la tabella riassuntiva delle risposte (Allegato B7) e la trascrizione delle interviste effettuate (Allegato B8).

Situazione 1: Ricordi la storia di Biancaneve e i sette nani? Mammolo aveva un anno in più rispetto a Cucciolo e un anno in meno rispetto a Pisolo?

Circa 33,3% degli allievi coinvolti nella ricerca che hanno effettuato la conversione dalla rappresentazione proposizionale a quella algebrica sottolineano positivamente la semplicità e l'immediatezza del metodo algebrico. La rappresentazione proposizionale risulta essere, ancora una volta, una rappresentazione a sé, poco matematica, perché "ti spiega un pò", mentre "le altre hanno lettere o numeri", elementi tipici della matematica. Questa considerazione è molto simile a quella vista in precedenza a proposito della classe terza. Alcuni studenti, pari al 22,2%, tra coloro i quali hanno optato per la rappresentazione figurale, ritengono l'attività "carina e nuova" per la presenza delle immagini tipica delle elementari e al mondo infantile, anche se in fondo c'è una leggera diffidenza verso tale rappresentazione perché, come sostiene l'allieva A., uno studente bravo e evoluto come il suo compagno L. non ha bisogno di "disegnare per capire, perché capisce tutto subito". Il registro iconico viene scelto dal 11,1%, mentre soltanto un allievo, pari al 5,5% degli studenti, effettua il trattamento all'interno del registro proposizionale sintetizzando le informazioni date. Circa 27,7% degli allievi non riesce a trovare un altro modo per rappresentare la situazione proposta a causa della mancanza di dati numerici.

Situazione 2: $(n-1)+n+(n+1)$

Circa 44% degli allievi effettua la conversione dal registro algebrico a quello verbale. Di questi, il 75% ricorre alla storia dei tre nani attribuendo i tre addendi nella espressione all'età dei nani. Ciò significa, in accordo con Duval (2006), che c'è una conoscenza previa a monte, in base alla quale l'identità dello stesso oggetto matematico può essere stabilita. Si può non riconoscere affatto identità, come accade nel corso attitudinale esaminato precedentemente, nel senso che l'interpretazione è o sembra essere diversa, ed allora si è perso il senso dell'oggetto originario di partenza.

Vi sono poi discrepanze tra le due classi a proposito del registro figurale. Sorprendentemente, nella classe seconda si ha una netta diminuzione percentuale nella scelta del registro figurale (dal 68,75% al 27,7%), il quale viene visto con qualche diffidenza e talvolta addirittura esplicitamente evitato a scapito del registro algebrico "perché non avevo voglia di disegnare". Un primo raffronto dei risultati rivela che un anno di studio che separa gli allievi della seconda media e quelli della terza media (corso attitudinale) non sembra aver indotto in termini radicali l'uso del registro algebrico. A proposito di questa osservazione, si segnala la necessità di un indagine più approfondita che potrebbe portare ad una didattica esplicita, sensibile alla complessità e all'uso spontaneo dell'registro algebrico. Non è escluso che un simile approccio, tratto da Sawyer (1974) e avviato nella classe seconda a partire dall'Attività 1, possa aver creato le discrepanze tra i due livelli circa l'uso *spontaneo* del registro algebrico, nella classe seconda, e quello *meccanico* perché atteso dall'insegnante, nel corso attitudinale.

Non sembra esserci un legame significativo tra la scelta del registro ritenuto più adatto ed il livello scolastico, come del resto affermano le ricerce in D'Amore (1999). Tuttavia, il riferimento alle situazioni realistiche (petali, fiori, macchie, cavalli, omini) rimane invariato nei due livelli scolastici.

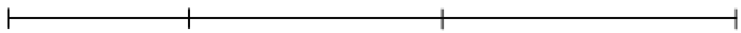
Circa 16,6% degli studenti mantiene invece la rappresentazione algebrica di partenza introducendo soltanto un'altra lettera al posto di n. La vera costante nei due livelli è il rifiuto del registro iconico. Ciò contrasta, ancora una volta, con il fatto che tale registro sia ampiamente utilizzato nella scuola media. Si può già accennare dunque, con D'Amore (1999), che non è affatto vero che la scelta dei registri rappresentativi sia neutra. Su questa considerazione si tornerà tra breve.

Situazione 3: il triplo di un numero

Il registro maggiormente scelto nella conversione dalla rappresentazione proposizionale è quello algebrico, con il 38,8%. Segue il registro figurale scelto dal 33,3%; il registro iconico con il 11,1%, mentre soltanto un allievo, pari al 5,5% ricorre al registro verbale supportato da quello iconico.

Situazione 4: $3 \cdot n$

La scelta dei registri rappresentativi utilizzati nella conversione (o nel trattamento) dal registro algebrico è la seguente: il registro algebrico con il 44,4%, il registro figurale con il 27,7% e il registro verbale con il 5,5%. Il registro iconico ancora una volta non incontra nessuna simpatia. Soltanto un allievo non effettua nessun tipo di conversione o di trattamento.

Situazione 5: 

Il 55,5% degli allievi effettua la conversione dalla rappresentazione iconica a quella algebrica, spesso molto simile a quella riportata nella Situazione 2 [$(n-1)+n+(n+1)$]. Il registro figurale viene scelto dal 38,8%, mentre un allievo non fornisce nessun tipo di rappresentazione. Nessuno sceglie il registro verbale e quello iconico.

Situazione 6: La somma di tre numeri consecutivi

Il registro maggiormente scelto nella conversione dal registro proposizionale è il registro figurale con il 50%; segue il registro algebrico scelto dal 44,4%. Ancora una volta nessuno sceglie il registro iconico e quello verbale, mentre soltanto un allievo non ricorre a nessun tipo di rappresentazione. Il dato sorprendente è che ben 8 allievi su 18 (pari al 44,4%) riescono a mettere a confronto la rappresentazione proposizionale proposta con la rappresentazione algebrica $(n-1)+n+(n+1)$, e successivamente, effettuando il trattamento all’interno dello stesso registro algebrico, riconoscere che si tratta dello stesso oggetto matematico. Il salto rappresentazionale della conversione, secondo Duval, diventa così un problema cognitivo cruciale per l’apprendimento in situazioni epistemologiche di inaccessibilità degli oggetti rappresentati. Ed è talmente importante che si ricorre talvolta, come descritto precedentemente, ad una terza rappresentazione che servirà transitoriamente da rappresentazione intermedia, per esplicitare come avviene la messa in corrispondenza tra il contenuto della rappresentazione di partenza e quello della rappresentazione d’arrivo (Duval, 2006).

5.4.1 Il senso compartito da diverse rappresentazioni semiotiche

Alla domanda *Quali rappresentazioni riportano lo stesso messaggio, lo stesso significato?* il 27,7% degli allievi dichiara di riconoscere lo stesso oggetto matematico nelle sei rappresentazioni proposte. Dopo alcune sollecitazioni durante l’intervista, riguardanti la corrispondenza tra la rappresentazione algebrica nella Situazione 2 e la rappresentazione proposizionale nella Situazione 3, circa la metà abbandona l’ipotesi iniziale “perché il triplo di un numero non centra molto nella Situazione 2”. Un’altra giustificazione di chi non è più convinto che si tratti dello stesso oggetto matematico è legata al fato che "sembra la stessa cosa, qualcosa per tre, qui invece (indica la rappresentazione algebrica $(n-1)+n+(n+1)$) sono tre cose, ma una un pò più grande dell'altra".

Il 16,6% degli allievi riconosce invece spontaneamente la corrispondenza tra la rappresentazione algebrica $(n-1)+n+(n+1)$ e quella verbale data nella Situazione 3 (il triplo di un numero). Tale percentuale sale al 27,7% se si considerano anche le risposte alla seconda domanda. Questo dato è particolarmente interessante se si pensa che dei 17 ragazzi della classe terza (corso attitudinale), dopo varie sollecitazioni durante l'intervista, nessuno accetta la corrispondenza tra le due rappresentazioni in questione. Dalle motivazioni espresse di chi riconosce tale corrispondenza emergono elementi che confermano l'importanza di una rappresentazione intermedia. Di fatto, la totalità di questi allievi ricorre alla rappresentazione figurale delle due situazioni e in seguito riconosce la loro sostanziale equivalenza perché "le ho fatte simili". A conferma di ciò, si veda il seguente protocollo dell'allieva A. (fig. 7 e fig. 8).

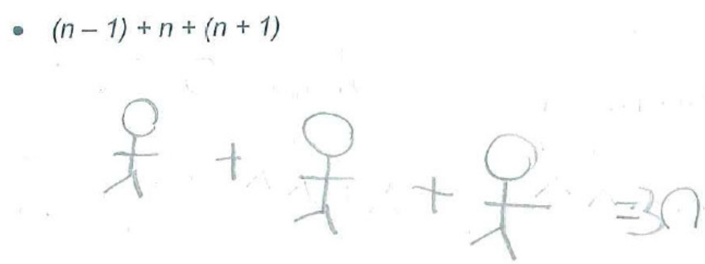


Figura 7

Figura 8

Il 5,5% degli allievi opta invece per le rappresentazioni 1, 2 e 5, mentre l'11,1% sceglie la situazione 3 e 4 (questa percentuale sale notevolmente al 75% nel corso attitudinale). Un'altra discrepanza tra i due livelli scolastici riguarda una percentuale significativa (pari al 33,3%) degli allievi nella seconda media i quali non forniscono nessuna risposta alla domanda iniziale.

5.4.2 L’affinità tra alcune rappresentazioni semiotiche proposte

Circa 27,7 % degli allievi vede la somiglianza tra *il triplo di un numero* e $3 \cdot n$, perché “si vede bene che è per 3 volte qualcosa moltiplicato per 3” e “si capisce meglio leggendolo ed è più facile”. Il 5,5% opta per le rappresentazioni 1, 2 e 5 “perché indicano tre numeri messi insiemi”. La stessa percentuale vede simili le rappresentazioni 2, 3 e 4 perché “rappresentano un numero moltiplicato per 3”. L’osservazione dell’allieva S. riguarda la somiglianza tra tutte quelle rappresentazioni “con i disegni e i grafici”, a causa delle forme grafiche simili e non del messaggio relazionale veicolato.

6. Risposte alle domande di ricerca

Relativamente all'Ipotesi 1, i risultati confermano pienamente l'attesa. Non è affatto vero che i registri rappresentativi diversi vengano necessariamente messi in corrispondenza per cogliere lo stesso significato-oggetto relazionale. Il riconoscimento del medesimo oggetto matematico di partenza è avvenuto in alcuni casi, come confermano anche gli studi di Duval (2005), attraverso una rappresentazione transitoria. Tuttavia, ciascuno studente fa più o meno fatica ad interpretare alcune rappresentazioni semiotiche ed accettarne altre, come del resto conferma la ricerca in D'Amore (1999).

L'ipotesi 2 risulta parzialmente smentita. La scelta del registro figurale come il più facile per sé stessi è la più alta, sia nella classe seconda (45%), sia nel livello attitudinale della classe terza (50%). Tuttavia, non sembra esserci un legame significativo tra la scelta del registro ritenuto più facile ed il livello scolastico. Inoltre, il contratto didattico sembra influenzare in modo significativo la scelta del registro figurale. Una vera costante nei due livelli è invece il rifiuto del registro iconico.

Relativamente all'Ipotesi 3, il registro figurale vede aumentare, in entrambe le classi, le sue percentuali di scelta nel passaggio dalla facillità per sé stessi a quella per i bambini di terza elementare, in modo uniforme: nella classe seconda passa dal 90% al 45%, mentre nella classe terza passa dal 80% al 50%. Tale uniformità potrebbe dipendere dal fatto che gli allievi di entrambe le classi ricordano bene le attività con i disegni diffuse nelle elementari. Vi sono poi discrepanze a proposito del registro algebrico: nella classe seconda la percentuale di scelta di tale registro, nel passaggio dalla facilità per sé stessi a quella per la docente, diminuisce dal 60% al 25%, mentre nella classe terza tale diminuzione (dal 53% al 13%) è più accentuata e potrebbe essere causa di un atteggiamento quasi ostile nel confronto di tale registro.

L'ipotesi 4 è confermata da numerose rappresentazioni semiotiche *distorte* prodotte dagli allievi nel passaggio da un registro ad un altro e da un numero significativo di allievi che non effettua nessun tipo di conversione e di trattamento a partire dalle situazioni proposte nei diversi registri semiotici.

Quanto all'Ipotesi 5, è confermato che la perdita di senso dell'oggetto matematico non avvenga solo a causa della conversione: nell'esempio analizzato la perdita di senso è avvenuta sia per trattamento che per conversione.

7. Conclusioni e implicazioni didattiche

I due studi riportati in questa ricerca hanno esaminato le abilità degli studenti nell'identificare lo stesso oggetto matematico a partire da diverse rappresentazioni semiotiche e nel passare da un modo di rappresentazione ad un altro. I risultati hanno evidenziato importanti differenze nel modo di trattare i diversi tipi di conversione e/o trattamento a partire da diverse rappresentazioni semiotiche dal medesimo oggetto matematico. Il ricorso alle varie forme di rappresentazione non è affatto neutro rispetto alle abitudini e alle istituzioni culturali. Il rifiuto del registro iconico, emerso più volte in questa ricerca, dovrebbe far riflettere, in linea con D'Amore (1999), sull'importanza delle verifiche preventive di sicura comprensione di questo registro.

Entrambi gli studi hanno evidenziato le difficoltà che gli studenti riscontrano nell'esprimere lo stesso oggetto matematico attraverso rappresentazioni semiotiche diverse, che a loro appaiono come oggetti matematici distinti e autonomi. La confusione avvenuta tra l'oggetto matematico con le sue rappresentazioni è inevitabile in questa fase di apprendimento, se si pensa che l'accesso diretto all'oggetto matematico considerato è impossibile al di fuori di ogni rappresentazione semiotica.

È sulla base di queste premesse, seguendo Sbaragli (2005), che si sostiene l'importanza di una trasposizione didattica che tenga conto del senso e del ruolo di differenti rappresentazioni semiotiche nell'accostamento all'algebra e lascia sbizzarire la fantasia degli allievi al fine di allontanarli dalle sterili e univoche rappresentazioni convenzionali.

Le considerazioni riportate fanno riflettere sull'importanza di considerare le trasformazioni di rappresentazioni semiotiche intrinseche ad ogni prassi matematica, facendo rientrare in questa trasposizione didattica l'implicazione diretta dell'allievo nell'apprendimento con la rottura del contratto didattico e lasciando spazio a quella che Duval (2006) chiama *l'autonomia per eccellenza*.

Con questa ricerca non si pretende di generalizzare le conclusioni a cui si è prevenuti coinvolgendo un numero ristretto di allievi di scuola media in un lavoro che si è protratto per alcune settimane. Sarebbe interessante indagare se l'approccio didattico adottato nelle due attività proposte permette anche di migliorare le competenze degli allievi nella risoluzione di problemi, aspetto che non è stato preso in considerazione da questa ricerca.

L’uso di diverse rappresentazioni semiotiche nei primi approcci all’algebra

Bibliografia

Bagni, G. T. (1997). La visualizzazione nella scuola secondaria superiore. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, 20B, 4, 309-335.

Bagni, G. T. (2007). *Rappresentare la matematica: simboli, parole, artefatti, figure*. Roma: Aracne.

Coggi, C., & Ricchiardi, P. (2010). *Progettare la ricerca empirica in educazione.* Roma: Carocci.

D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore, B. (2001). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*, 2, 150-173.

D'Amore, B. (2005). Uso spontaneo del disegno nella risoluzione di problemi di matematica. *La matematica e la sua didattica*, 3, 328-370.

D'Amore, B. (2006). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica*, 4, 557-583.

D'Amore, B., & Fandino Pinilla, M.I. (2007). How the sense of mathematical objects changes when their semiotic representation undergo treatment and conversion. *La matematica e la sua didattica*, 1, 87-92.

Duval, R. (2003). Décrire, visualiser ou raisonner: quels apprentissages premiers de l'activité mathématique? *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 8, 13-62.

Duval, R. (2005). Linguaggio, simboli, immagini, schemi … In quale modo intervengono nella comprensione in matematica e altrove? *Bollettino dei docenti di matematica*, 50, 19-39.

Duval, R. (2006). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. *La matematica e la sua didattica*, 4, 3-35.

Doretti, L., & Salomone, L. (2005). Avvio al concetto di equazione con i problemi del RMT.

Malara, N. (1997). Problemi di insegnamento-apprendimento nel passaggio dall'Aritmetica all'Algebra. *La matematica e la sua didattica*, 2, 176-185.

Malara, N., & Navarra, G. (2003). *Progetto ArAl, Quadro teorico di riferimento e glossario.* Bologna: Pitagora.

Santi, G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic transformation: a comparison between semiotic perspectives*. Phd dissertation. University of Palermo.

Sawyer, W. W. (1974). *Algebra intuitiva*. Torino: Boringhieri.

Sbaragli, S. (2005). L'importanza delle diverse rappresentazioni semiotiche. Il caso degli enti primitivi della geometria. *Bollettino dei docenti di matematica*, 50, 69-76.

Kaldrimidou, M. (1995). Lo status della visuallizzazione presso gli studenti e gli insegnanti di matematica. *La matematica e la sua didattica*, 181-194.