Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana
Dipartimento formazione e apprendimento

SUPSI

LAVORO DI DIPLOMA DI

LORENZA PORTERI FERDANI

CORSO COMPLEMENTARE DI MATEMATICA

ANNO ACCADEMICO 2010/2011

LE EQUAZIONI TRA SIGNIFICATO E SINTASSI

RELATORE

PROFESSOR GIANFRANCO ARRIGO

Indice

1. Introduzione 3

2. Quadro teorico 5

2.1 Immagini mentali e costruzione del concetto matematico 5

2.2 Teoria dei registri semiotici 6

2.3 Significato e sintassi nella costruzione del concetto di equazione 7

3. Domande e ipotesi di ricerca 10

4. Metodologia 11

4.1 Questionario preliminare 11

4.2 Impostazione didattica del progetto di intervento 12

4.3 TEPs e questionario conclusivo 14

5. Risultati e analisi dei dati 15

5.1 Classificazione delle immagini mentali 15

5.2 Aspetto sintattico e metodi risolutivi 18

5.3 Risoluzione di problemi 19

6. Risposte alle domande di ricerca 22

7. Conclusioni 24

8. Bibliografia 25

9. Allegati 26

1. Introduzione

In questo lavoro si cerca di delineare un approccio didattico mirato alla costruzione del significato di equazione in un gruppo di nove allievi di terza media, corso base. Si tratta di una ricerca-azione con una raccolta di dati di tipo qualitativo. L'intervento in classe è stato iniziato e concluso con un questionario al fine di raccogliere le immagini mentali degli allievi e osservare se e come si siano modificate.

L'idea per questa ricerca è nata da una riflessione personale in merito alle modalità con le quali gli allievi di terza, corso base, affrontano le attività di matematica. Lavorando con loro è possibile rendersi conto quanto questi studenti siano dipendenti dagli aspetti meccanici: essi cercano infatti di applicare delle regole formali, che più o meno conoscono, tralasciando però di riflettere sul loro significato. Si ostinano, ad esempio, a voler ricordare la formula "inversa" per risolvere un problema di geometria, senza comprendere che avendo a disposizione quella "diretta" possono ugualmente ricavare ciò che stanno cercando. Non riconoscendo il significato della formula, ne consegue una difficoltà a trasporre il sapere acquisito in altri contesti d'uso. Un esempio significativo permette di chiarire quanto descritto: gli studenti hanno appreso il Teorema di Pitagora e dimostrano di saperlo usare per risolvere problemi quando nella consegna ne viene esplicitato l'uso o quando nel testo compaiono le parole chiave, quali triangolo rettangolo, cateto, ipotenusa. Difficilmente però sanno trasporre questa conoscenza per risolvere altri problemi di geometria che, pur esigendo il Teorema di Pitagora, non menzionano le parole chiave. Inoltre gestiscono la formula risolutiva del teorema meccanicamente, senza contestualizzarla nella situazione, commettendo errori di tipo concettuale (ad esempio, sottraggono tra di loro le aree dei quadrati costruiti sui cateti, oppure sommano le lunghezze dei cateti senza elevarle al quadrato). L'allievo che agisce secondo queste modalità non ha costruito il significato del Teorema di Pitagora, bensì ricorda approssimativamente la sintassi della formula, spoglia del suo aspetto semantico.

Il progetto si propone di individuare se sia possibile rivestire di significato i concetti matematici e se questo permetta agli allievi di essere meno dipendenti dalle regole formali. Si vuole analizzare questi aspetti circoscrivendo l'indagine al tema *equazioni*, in quanto argomento che permette di osservare la potenziale divergenza tra *applicazione di regole formali* e *costruzione di significati*. Malara e Navarra (2003) evidenziano come molteplici problemi relativi all'apprendimento dell'algebra siano da ricondurre alla tradizionale e diffusa pratica didattica la quale, durante la

costruzione dei concetti, tende a porre un'eccessiva attenzione sui *meccanismi manipolativi*, tralasciando gli *aspetti semantici e funzionali*. Secondo questi autori, le problematiche relative all'insegnamento dell'algebra risultano essere un tema di interesse attuale a livello internazionale, al quale la ricerca degli ultimi vent'anni ha dedicato la propria attenzione, cercando di delineare dei possibili approcci per sviluppare il *significato* degli oggetti e dei processi algebrici.

2. Quadro teorico

Per questa ricerca si fa riferimento a tre importanti componenti coinvolte nel processo di costruzione di un concetto matematico: le *immagini mentali*; i *registri semiotici*; il binomio *significato-sintassi*. Il progetto didattico rappresenta un tentativo di valorizzare i legami tra una e l'altra. Nella costruzione di un concetto matematico, è infatti possibile tracciare una stretta connessione tra immagini mentali, registri semiotici e significato (D'Amore, 1999; 2003):

- l'evolversi delle immagini mentali porta alla costruzione del modello mentale di un determinato concetto;
- un concetto si considera costruito solo quando l'individuo è in grado di rappresentarlo, di trasformare tale rappresentazione, di usarla spontaneamente e in modo opportuno in contesti differenti;
- raggiungere il modello mentale adeguato di un concetto implica avere accesso al suo significato.

2.1 Immagini mentali e costruzione del concetto matematico

Per quel che riguarda questo campo, le interpretazioni e la terminologia usata sono molteplici e, talvolta, in contraddizione. Ne conseguono tradizioni di ricerca diverse, sia per i riferimenti teorici assunti sia per le metodologie impiegate (D'Amore, 1999). Ad esempio Kosslyn «[...] suggerisce l'idea di immagine come una forma di attivazione ed utilizzazione di strutture di dati a disposizione dell'individuo. Forse è a partire da questo suggerimento che si elabora il modo moderno di vedere le immagini come un *processo* e non come un semplice *stato*; [...]» (cit. in D'Amore, 1999, p. 147-148).

Per l'impostazione che intendo dare alla ricerca mi rifaccio alla definizione di *immagine mentale* proposta da D'Amore (1999; 2003), in rapporto ai processi cognitivi nel campo della matematica.

Immagine mentale è il risultato figurale o proposizionale prodotto da una sollecitazione, che può essere interna o esterna. L'immagine mentale è condizionata da esperienza personale e influenze culturali; in poche parole è un prodotto tipico dell'individuo, ma con costanti e connotazioni comuni tra individui diversi. Anche se può essere elaborata coscientemente, l'immagine mentale è interna e, almeno in prima istanza, involontaria. L'insieme delle immagini mentali, relative ad uno stesso concetto ed elaborate in diverse occasioni specifiche, costituisce il *modello mentale* del concetto stesso.

Intendo considerare il modello mentale *dinamicamente*, come immagine-limite di un processo che costituisce una successione. (D'Amore, 1999; 2003). Molti concetti matematici sono infatti raggiunti grazie a passaggi da un'immagine all'altra, che avvengono nel seguente modo: lo studente si costruisce un'immagine relativa ad un determinato concetto, la quale, sottoposta a sollecitazioni diverse (per esempio da parte del docente), può trovarsi in contrasto con la sollecitazione stessa, creando il cosiddetto conflitto cognitivo. Lo studente deve allora elaborare la "vecchia" immagine per adeguarla alla nuova situazione. Si giunge così ad una nuova immagine mentale, che conserva le vecchie informazioni e accoglie coerentemente anche le nuove, divenendo sempre più completa e vicina al concetto stesso. Questa situazione può ripetersi più volte, finché ad un certo punto l'immagine creatasi "resisterà" a qualsiasi sollecitazione e non avrà più bisogno di essere seguita da una nuova. A questo punto lo studente trasforma, spesso inconsciamente, l'immagine mentale associata a quel concetto in un modello mentale stabile. Farsi un modello di un concetto significa quindi rielaborare immagini, deboli e *instabili*, per giungere ad una di esse definitiva, forte e *stabile*. Nelle immagini mentali vi sono elementi varianti e elementi invarianti. Nel processo dinamico che conduce al modello matematico adeguato, gli elementi varianti vengono a poco a poco eliminati. Nel modello finale rimangono solo gli elementi invarianti, essenziali per la caratterizzazione del concetto.

A scopi didattici (D'Amore, 1999), il poter conoscere il modello mentale, che uno studente si è fatto di uno specifico concetto matematico, permetterebbe all'insegnante di costruire delle strategie personalizzate adatte a modificare i modelli non perfettamente adeguati al sapere matematico. A tale proposito, è importante tener conto della difficoltà nel voler conoscere i modelli mentali degli allievi, perché si tratta di "modelli interni". Di conseguenza, è possibile rilevare e analizzare soprattutto il *modello esterno* di un concetto, risultato di una traduzione, con finalità comunicative, del *modello interno*. Tutto ciò comporta dei limiti: infatti un modello esterno può essere influenzato dal contratto didattico allievo-docente o dal desiderio dello studente di compiacere il ricercatore.

2.2 Teoria dei registri semiotici

Con il termine *semiotica*, nel caso della matematica, si intende la rappresentazione di concetti mediante un sistema di segni. La teoria dei registri semiotici, elaborata da Duval (1993) e in seguito adottata da D'Amore (1999; 2003), è costruita sul presupposto che «Ogni concetto matematico è costretto a servirsi di rappresentazioni, dato che non vi sono "oggetti" da esibire in loro vece o a loro evocazione; dunque la concettualizzazione deve necessariamente passare attraverso registri rappresentativi [...]» (D'Amore, 2003, p. 39). Anche Radford (2004) si è occupato della

problematica descritta, focalizzando la sua attenzione sulla generalizzazione in matematica. In linea con Duval e D'Amore, egli considera la capacità di generalizzare un processo semiotico.

Appare evidente come le rappresentazioni semiotiche siano un aspetto determinante nella costruzione di un concetto matematico. Si ritiene infatti che l'apprendimento concettuale avvenga necessariamente attraverso l'acquisizione di una o più rappresentazioni semiotiche del concetto stesso. Lo stesso D'Amore (2003), citando Vygotskij (1962), sostiene che «Anche l'esperienza dimostra che l'insegnamento diretto dei concetti è impossibile e sterile. Un insegnante che tenta di fare questo, normalmente non raggiungerà nulla, se non un vuoto verbalismo».

In questo processo di costruzione intervengono tre importanti operazioni cognitive "caratteristiche della semiotica": la scelta degli elementi distintivi del concetto *(rappresentazione)*; il passaggio da una rappresentazione all'altra in uno stesso registro semiotico *(trattamento)*; il passaggio da un registro all'altro *(conversione)*. In questa ottica, l'apprendimento risulta essere una costruzione che avviene mediante un mezzo comunicativo e che sarà necessariamente condizionata dalla scelta del registro di rappresentazione adottato. Una scelta consapevole dei registri semiotici risulta determinante per la pratica didattica: registri diversi fissano elementi distintivi differenti di uno stesso concetto. Secondo Duval (in D'Amore, 2003) l'operazione di conversione (cambio di registro) sembra essere la più significativa: essa permette infatti di individuare e definire gli elementi invarianti che costituiscono l'essenza di un concetto.

La costruzione di un concetto matematico può quindi essere descritta come un lungo viaggio attraverso il quale a poco a poco gli elementi varianti del concetto vengono abbandonati, mentre i tratti caratterizzanti si delineano in maniera sempre più precisa. I passaggi da una rappresentazione semiotica all'altra permettono alle immagini mentali di modificarsi e di accogliere ad ogni passaggio nuove informazioni e proprietà, fino a consolidarsi in un modello mentale adeguato e stabile. Al termine del viaggio ciò che dovrebbe rimanere sono i tratti costitutivi del concetto.

2.3 Significato e sintassi nella costruzione del concetto di equazione

L'aspetto sintattico dell'equazione comprende le regole di scrittura dell'algebra e i principi di equivalenza atti a risolvere l'equazione dal punto di vista algoritmico (ad esempio, in linguaggio naturale: "porto di qui, porto di là"). L'aspetto semantico - ovvero la costruzione di significati - presuppone la contestualizzazione dell'oggetto matematico, il saper tradurre un problema nel linguaggio algebrico (e viceversa) e permette di dare significato alle procedure adottate per risolvere le equazioni ("*perché* porto di qui, *perché* porto di là").

Malara e Navarra (2003, p. 21-22), in merito alla questione «[...] quale delle due analisi - quella sintattica o quella semantica - debba precedere l'altra» non hanno alcun dubbio: «l'analisi sintattica segue necessariamente quella semantica [...]». Essi puntualizzano che «[...] tradurre delle frasi dal linguaggio naturale (o grafico, o iconico) a quello matematico [...] significa interpretare e rappresentare una situazione problematica mediante un linguaggio formalizzato o, al contrario, riconoscere in una scrittura simbolica la situazione che essa descrive».

Numerosi studi sulla didattica dell'algebra (cf. Malara & Navarra, 2003) evidenziano invece che nell'abituale percorso di insegnamento si pone l'accento soprattutto sui meccanismi manipolativi e sulle tecniche di calcolo, come se lo studio delle regole formali fosse precedente alla comprensione dei significati. Si tende cioè ad insegnare la *sintassi* dell'algebra trascurando la sua *semantica*. Secondo questo approccio, le equazioni vengono introdotte dapprima come "oggetto matematico", dove gli allievi imparano a "trasportare" termini da un membro all'altro, e solo in un secondo momento come strumento per la risoluzione di problemi.

Di conseguenza l'algebra perde la caratteristica di essere un potente strumento di ragionamento e si favorisce lo scollamento tra linguaggio simbolico e significato (Medici & Rinaldi, 2005).

Malara e Navarra ribadiscono che «[...] l'attenzione non deve essere tutta tesa alla ricerca immediata degli strumenti (le operazioni) per ottenere la risposta (il risultato) nelle varie situazioni, ma deve sollecitare prima di tutto la rappresentazione della situazione stessa, stimolando per tappe successive il passaggio dal linguaggio naturale, nel quale sono formulati i problemi, a quello algebrico-formale, in cui si traducono le relazioni che essi contengono» (cit. in Doretti & Salomone, 2005, p. 236). Secondo questo punto di vista, l'equazione risulta essere la traduzione simbolica di situazioni-problema presentate con diverse tipologie di linguaggio. Richiamando la teoria di Duval, i *passaggi* da un linguaggio all'altro sono da considerare delle operazioni di conversione, cioè rappresentazioni diverse di uno stesso problema in registri semiotici differenti. Pertanto il concetto di equazione si presta particolarmente bene ad essere acquisito attraverso un apprendimento semiotico.

Le considerazioni precedenti incoraggiano a introdurre il concetto di equazione attraverso l'esplorazione di problemi. Un tale approccio permette di contestualizzare l'oggetto matematico in questione e induce gli allievi a voler conoscere gli strumenti necessari alla sua risoluzione. Utilizzare un'equazione per risolvere un problema implica una successione di conversioni: dai vari linguaggi non propriamente matematici fino a giungere alla "messa in equazione", che costituisce il modello adeguato stabilito dall'insegnante. Il solo saper gestire un'equazione dal punto di vista

procedurale (sintattico) non è quindi sufficiente per poter risolvere un problema mediante un'equazione.

L'allievo che dà significato alle equazioni secondo questo approccio dovrebbe dunque:

- tentare innanzitutto di tradurre una situazione problema nel linguaggio algebrico (conversione), senza avere come obiettivo la ricerca del risultato;
- saper contestualizzare una scrittura formale, cioè non gestire meccanicamente la scrittura ma saper dare un significato a quanto scritto, anche attraverso la conversione da un registro all'altro;
- saper risolvere un'equazione dal punto di vista sintattico, capendo perché vengono svolti determinati passaggi.

3. Domande e ipotesi di ricerca

D1. Quali sono le immagini mentali degli allievi di terza media, corso base, riguardo alle equazioni?

D2. Un approccio strutturato secondo i seguenti principi:

a) uso di diversi registri semiotici e conseguente conversione da un registro all'altro;

b) possibilità di lavorare dapprima in modo intuitivo, senza dover affrontare a priori questioni di tipo sintattico e formalizzando solo nel momento in cui si è costruito il concetto,

permette agli allievi di apprendere il significato delle equazioni e di essere meno dipendenti dagli aspetti sintattici (procedurali)?

I1. Si ipotizza che gli allievi prima dell'intervento didattico:

- identifichino nell'equazione una procedura per *calcolare* un numero sconosciuto, senza essere in grado di formalizzarne il concetto;
- riconoscano come equazioni qualsiasi espressione matematica contenente una variabile oppure scritture nelle quali l'incognita si trova sempre a sinistra dell'uguale ed è rappresentata dalla lettera x;
- non mettano in relazione l'equazione con la risoluzione di problemi e di conseguenza non ne facciano uso per risolverli.

L'attenta osservazione delle immagini mentali degli allievi può rilevare sul nascere alcuni importanti ostacoli all'apprendimento del significato di equazione.

I2. Procedendo secondo le scelte descritte nelle domande di ricerca, gli allievi hanno un maggiore accesso al significato del concetto di equazione e non solo all'aspetto sintattico-procedurale. Di conseguenza cambiano il loro modo di affrontare e risolvere i problemi.

4. Metodologia

Per rispondere alle domande di ricerca sopra esposte è stata progettata una ricerca-azione con una raccolta di dati di tipo qualitativo. La ricerca è stata condotta in una classe di terza media, corso base, di nove allievi.

Il processo di osservazione effettuato è costituito da tre fasi distinte. Inizialmente è stato proposto agli allievi un questionario individuale per poter raccogliere e analizzare le loro immagini mentali, prima che avessero ricevuto una qualsiasi sollecitazione da parte del docente.

In seguito gli allievi sono stati coinvolti in attività finalizzate alla costruzione del significato di equazione, per poter comprendere pienamente l'oggetto matematico in questione, in tutte le sue sfaccettature. In questa fase il docente ha tenuto un diario delle attività.

I dati conclusivi sono stati raccolti mediante l'elaborazione di TEPs[1] a coppie (Maier, 2000) e un questionario da completare individualmente. Si sono quindi confrontati i dati emersi dal primo questionario con quelli ottenuti nella fase conclusiva per valutare se e come sono cambiate le immagini mentali degli allievi. Questo confronto ha permesso di stabilire se gli allievi hanno costruito coscientemente il concetto di equazione, comprensivo del suo significato, o se si sono soffermati unicamente sugli aspetti sintattici.

4.1 Questionario preliminare

Il questionario introduttivo (disponibile nell'allegato A), è costituito da quattro sezioni, ciascuna delle quali esplora una componente della costruzione del significato di equazione. È stato sottoposto agli allievi durante quattro lezioni diverse, senza che sia stata esplicitata la connessione tra una parte e l'altra.

La prima unità, composta da quattro domande aperte, indaga principalmente su cosa sia un'equazione nella concezione degli allievi e su quale sia la sua funzione.

La seconda sezione ha come obiettivo il riconoscimento della sintassi di un'equazione tra diverse scritture di tipo algebrico e aritmetico. Le scritture proposte non presentano unicamente la forma

[1] Text Eigen Produkte [letteralmente: produzioni testuali autonome degli allievi] : si tratta di testi elaborati in modo autonomo dagli studenti attorno ad argomenti di matematica.

canonica dell'equazione, caratteristica dell'insegnamento tradizionale di cui si è parlato in precedenza (Malara & Navarra, 2003).

La terza attività indaga sulle competenze sintattiche di risoluzione di un'equazione. Agli allievi è stato chiesto di risolvere due equazioni e di spiegare a parole come hanno proceduto.

Il quarto momento propone la risoluzione di due problemi (uno di geometria e uno aritmetico) senza che nella consegna venga specificato l'uso di un'equazione quale strategia risolutiva.

4.2 Impostazione didattica del progetto di intervento

L'intervento in classe, della durata di circa due mesi, si è articolato in otto momenti. Il piano completo dell'itinerario è disponibile nell'allegato B. In questa sede verranno presentati unicamente i principi didattici a partire dai quali è stato costruito, in riferimento al quadro teorico, e un'attività esemplificativa.

Per la preparazione delle attività si è fatto riferimento in particolare agli autori Malara e Navarra (2003), i quali, per la costruzione del concetto di equazione, ipotizzano un percorso che preveda:

- l'approccio al codice algebrico realizzato nel passaggio dal linguaggio naturale al linguaggio formale e viceversa;
- la costruzione collettiva di significati (semantica);
- la consapevolezza delle regole del nuovo linguaggio (sintassi);
- la rappresentazione e la descrizione delle situazioni problematiche attraverso il linguaggio algebrico.

Per alcune scelte didattiche si è pure preso spunto dalle esperienze effettuate da Sawyer (1974), il quale descrive quanto siano importanti il ruolo visivo in algebra e il dare significato all'apprendimento.

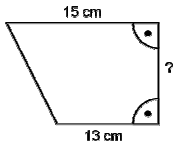
«Un segno privo di significato non fa riflettere; lo si può solo guardare»; «[...] è estremamente difficile ricordare cose che non si siano comprese» (Sawyer, 1974, p. 15; 14).

In linea con Malara e Navarra, Sawyer sostiene che un primo approccio all'algebra dovrebbe avvenire in modo intuitivo, senza passare attraverso l'acquisizione di regole.

Tenendo presente questa traccia, l'intervento proposto prevede:

- Un approccio alle equazioni attraverso situazioni problema, per favorire la contestualizzazione dell'oggetto matematico. Questa scelta permette di evidenziare l'aspetto funzionale dell'equazione: essa è un potente strumento (anche se non l'unico) per risolvere problemi.
- La conversione di un problema da un registro semiotico all'altro. In particolare si utilizzano i seguenti linguaggi: naturale; figurale (pittorico o geometrico); schematico; algebrico. Progressivamente gli allievi saranno condotti a "vedere" l'equazione come la traduzione matematica di una situazione, in origine espressa con un linguaggio non algebrico.

Tabella 4.2.1 – Esempio di attività

Traduzioni in linguaggi differenti	
Linguaggio naturale Se al triplo di un numero sottraggo 29 trovo 82: qual è quel numero?	**Schema a frecce**
Linguaggio algebrico $(3z + 6) : 2 = 63$	**Linguaggio naturale**
Linguaggio algebrico $(3 \cdot b + 15) : 3 = 8$	**Schema a frecce**
Linguaggio figurale  Area della figura = 147 cm^2	**Linguaggio algebrico**
Per ciascuna situazione determina il valore dell'incognita e verifica la soluzione ottenuta.	

- Preparare il passaggio dal problema alla "messa in equazione", secondo il principio "prima rappresenta, poi risolvi" (Malara & Navarra, 2003, p. 16). Agli allievi, in questo primo momento, non viene richiesta la risoluzione formale dell'equazione per ottenere il risultato; lo scopo è tradurre un problema nel linguaggio algebrico.
- Risoluzione intuitiva dell'equazione attraverso metodi diversi: aritmetico (uso delle operazioni inverse), percorso a frecce, linguaggio pittorico, metodo delle bilance oppure "per tentativi". Anche alcuni di questi passaggi prevedono conversioni di registri semiotici.
- Problemi la cui soluzione (per gli allievi) sia possibile solo attraverso un'equazione, per evidenziare "la forza dell'algebra" e creare la necessità di imparare a risolverle.
- Una formalizzazione conclusiva sulla base di quanto emerso durante il percorso e costruita con gli allievi. I principi di equivalenza vengono definiti solo in questo momento.

Gli allievi hanno lavorato spesso a coppie per avere la possibilità di confrontare le proprie scelte e collaborare nella risoluzione. Le coppie sono state scelte dall'insegnante secondo le dinamiche di classe e le competenze individuali e sono state modificate nel corso delle attività.

Durante questa fase l'insegnante ha tenuto un diario nel quale annotava le strategie adottate e le osservazioni particolarmente interessanti per la ricerca. Nell'analisi dei risultati saranno inserite alcune riflessioni raccolte dal docente durante le discussioni nei gruppi di lavoro, momenti in cui lo studente è meno vincolato dal rapporto con l'insegnante-valutatore e quindi può esprimere anche convinzioni appartenenti al *modello interno*.

4.3 TEPs e questionario conclusivo

La raccolta dati, dopo l'intervento in classe, è avvenuta mediante l'elaborazione di TEPs a coppie e un questionario individuale avente gli stessi obiettivi di quello preliminare: questo in prospettiva di poter effettuare un confronto.

I TEPs sostituiscono le quattro domande aperte presenti nel primo questionario. Gli allievi devono provare a spiegare a dei compagni di seconda media *cosa* siano le equazioni - *come* si usino e fornire loro dei suggerimenti importanti per capire l'argomento nel migliore dei modi.

Il questionario (disponibile nell'allegato C) è composto da tre sezioni ed è stato sottoposto agli allievi durante tre lezioni diverse. Nella prima unità gli allievi devono individuare le scritture che rappresentano un'equazione, mentre nella seconda hanno il compito di risolvere tre equazioni (con difficoltà graduali), spiegando a parole i passaggi effettuati.

La terza fase è costituita da tre situazioni (una di geometria e due aritmetiche) per le quali gli allievi devono dapprima effettuare la traduzione nel linguaggio algebrico e solo in un secondo momento individuare la soluzione del problema.

I dati raccolti per ciascuna sezione dei 2 questionari (preliminare e conclusivo) e dall'analisi dei TEPs sono descritti in modo dettagliato in tabelle (disponibili nell'allegato D). L'analisi dei risultati è stata effettuata in modo incrociato, cioè confrontando quanto emerso prima dell'intervento e dopo l'intervento didattico.

5. Risultati e analisi dei dati

5.1 Classificazione delle immagini mentali

Dall'analisi delle risposte ottenute dalla prima sezione del questionario preliminare, emergono quattro immagini mentali relative al concetto di equazione: "è un calcolo"; "è quando si deve cercare un numero"; "è quando bisogna trovare l'incognita *x*"; "è un metodo per risolvere i problemi".

Tabella 5.1.1 – Immagini mentali *prima* dell'intervento

Che cos'è per te un'equazione?		**A cosa servono le equazioni?**	
Un calcolo	4	Trovare il numero mancante	3
Trovare il numero mancante	1	Trovare l'incognita x	1
Trovare l'incognita x	3	Risolvere problemi	3
Altro	1	Altro	2

Quasi la metà degli allievi descrive l'equazione come un calcolo, mentre nessuno definisce l'equazione un'uguaglianza: ciò denota che questi allievi non sono ancora in grado di formalizzare il concetto.

Solamente tre studenti contestualizzano l'equazione all'interno della risoluzione di problemi, anche se due di loro hanno precedentemente definito tale concetto "un calcolo" - "un calcolo in colonna". Emerge quindi preponderante l'aspetto procedurale legato all'immagine di equazione, ma in generale al modo di "fare matematica", cioè la ricerca del "prodotto", del risultato (Malara & Navarra, 2003).

Dal diario tenuto durante le attività in classe, si possono cogliere alcune affermazioni degli allievi che rafforzano queste immagini mentali:

> *"Ai corsi attitudinali ci hanno spiegato che l'equazione è un calcolo, lì non mi dava l'idea del calcolo, non capivo dov'era il risultato."*

Di fronte ad un'equazione che presenta la stessa incognita ripetuta più volte (es.: a + a + 4 + 2a + 4 + 4 = 40), un allievo afferma:

> *"Non abbiamo usato un'equazione: nell'equazione si mettono i numeri da una parte e le x dall'altra."*

L'analisi delle risposte ricavate dall'elaborazione di TEPs permette di individuare due nuove immagini mentali: "l'equazione è un'uguaglianza" e "è un'uguaglianza con incognita".

Tabella 5.1.2 – Immagini mentali *dopo* l'intervento

Che cos'è per te un'equazione		**A cosa servono le equazioni?**	
Un'uguaglianza	4	Risolvere problemi	8
Un'uguaglianza con incognita	2	Trovare l'incognita	1
Un calcolo	2		
Altro	1		

Si può notare come le "vecchie" immagini mentali siano state modificate dalla maggior parte del gruppo classe. L'*uguaglianza*, aspetto caratterizzante del concetto, è messo in risalto da sei allievi su nove:

> *"L'equazione è un'uguaglianza e serve quasi sempre per risolvere problemi o calcoli inversi. Si può paragonare ad una bilancia dove l'operazione svolta su un piatto bisognerà svolgerla anche sull'altro, così da mantenere l'uguaglianza."*
>
> *"Per esempio si usano per un problema, quando bisogna trovare un numero, un'incognita, che messa sopra la "bilancia" su un piatto, insieme ad una parte del calcolo, deve avere lo stesso peso."*
>
> *"Alla fine bisogna fare la verifica per vedere se la soluzione trovata fa bilanciare il calcolo."*

Tre allievi non hanno ancora sviluppato un'immagine mentale vicina al modello atteso dal docente (equazione = uguaglianza che contiene almeno un'incognita). In particolare, due di loro sono rimasti ancorati alla "vecchia" immagine mentale, dalla quale risulta che l'equazione "è come un calcolo per trovare un numero mancante".

L'intera classe ha colto l'aspetto pragmatico dell'equazione: otto allievi su nove contestualizzano l'oggetto matematico all'interno della risoluzione di problemi, un allievo afferma che serve per "cercare" il valore dell'incognita attraverso il calcolo inverso.

Tabella 5.1.3 – Immagini mentali *prima* dell'intervento / *dopo* l'intervento

Riconoscere un'equazione attraverso la sua sintassi	*prima*	*dopo*
Scritture "intuitive" - non formali	6	6
Scrittura formale con incognita a sinistra dell'uguale	8	9
Scrittura formale con incognita a destra dell'uguale	4	7
Espressione algebrica	4	0
Espressione numerica	0	1
Scrittura che rappresenta l'identità	3	7
Errori [2]	17	6

Dall'analisi delle risposte ottenute nella seconda sezione del questionario, come indicato nella tabella 5.1.3, risulta che otto allievi considerano un'equazione la scrittura in forma canonica, avente l'incognita a sinistra del segno uguale; di questi otto solo quattro prendono in considerazione anche la forma avente l'incognita a destra. Un allievo considera equazioni tutte le forme di scrittura che contengono una lettera.

Si delineano così altre due immagini mentali: "l'equazione è una qualsiasi espressione contenente una lettera" e "sono equazioni le scritture aventi l'incognita a sinistra dell'uguale".

Dopo l'intervento tutti gli allievi identificano come equazioni la scrittura canonica e sette su nove anche la forma avente l'incognita a destra. Dal confronto dei risultati si può constatare che, anche in quest'occasione, le immagini mentali antecedenti l'intervento didattico sono state modificate. Vengono infatti riconosciute come equazioni solo le forme di scrittura che esprimono un'uguaglianza, mentre nella prima fase quattro allievi hanno considerato tali anche l'espressione algebrica, poiché contiene delle lettere.

In questa fase agli allievi è stato chiesto di giustificare le forme di scrittura non considerate delle equazioni. Le risposte sono riportate nella tabella 5.1.4.

Tabella 5.1.4 – Giustificazioni degli allievi *dopo* l'intervento

scritture	**NO**	**Motivazione**	**Frequenza**
$n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$	9	Non è un'uguaglianza.	9
$15 + (4 + 26) : 6 = 20$	8	Non c'è l'incognita.	5
		È un calcolo.	2
$7c + 13c = 20c$	2	È un calcolo.	2

[2] Non sono stati conteggiati gli errori relativi all'identificazione dell'identità come equazione.

L'analisi dimostra che gli allievi giustificano le proprie scelte in maniera coerente, in riferimento a quanto emerso nel cambio di immagine mentale.

5.2 Aspetto sintattico e metodi risolutivi

Agli allievi non sono state fornite precisazioni in merito a come risolvere le equazioni.

Tabella 5.2.1 – Metodi risolutivi *prima* dell'intervento

Equazioni	corretta	Metodo risolutivo	
a) x + 5 = 29	7	Registro aritmetico	5
b) 30 = 3x - 3	2	Manipolazione"tradizionale"	3
		Manipolazione "ragionata"	1
		Per tentativi	1

Tabella 5.2.2 – Metodi risolutivi *dopo* l'intervento

Equazioni	corretta	parzial-mente	Metodo risolutivo	
a) 96 = 72 + 6b	6	0	Registro aritmetico	0
b) 14a+32=6a-16	1	0	Manipolazione"tradizionale"	1
c) x^2 + 17 = 42	0	7	Manipolazione "ragionata"	8
			Per tentativi	0

È possibile classificare i metodi risolutivi utilizzati dagli allievi in quattro categorie:

- Registro aritmetico: utilizzo di un calcolo inverso (ad es. 29 – 5 = 24).
- Manipolazione "tradizionale": si spostano lettere e numeri da un membro all'altro effettuando l'operazione inversa.
- Manipolazione "ragionata": si applicano i principi di equivalenza secondo uno schema che *descrive* i passaggi svolti. (cf. Allegato E).
- Per tentativi.

In un primo tempo, la maggior parte degli allievi risolve l'equazione attraverso un calcolo inverso, facilmente individuabile grazie alla situazione proposta. Questo metodo non si rivela però efficace per risolvere la seconda equazione (dove individuare le operazioni inverse comporta più passaggi), pertanto gli allievi tentano di spostare numeri e lettere da un membro all'altro ma con risultati poco soddisfacenti. La maggior parte degli allievi non sa spiegare con precisione i passaggi effettuati (cf. allegato D, tabella 3a).

Dopo l'intervento, otto allievi affrontano la risoluzione con la manipolazione "ragionata". Solo un allievo rimane radicato al metodo "tradizionale", che ha acquisito al corso attitudinale. Egli gestisce il "suo" metodo con successo, in quanto risolve correttamente entrambe le equazioni.

In questa fase gli studenti sono in grado di motivare i passaggi effettuati per ricavare la soluzione. La maggior parte (7/9) descrive le operazioni svolte a destra e a sinistra del segno uguale; tre allievi specificano che *"bisogna avere le lettere da una parte e i numeri dall'altra"*, *"le operazioni vanno svolte a destra e a sinistra dell'uguale"* e che *"bisogna mantenere l'equilibrio"*.

5.3 Risoluzione di problemi

Nelle tabelle 5.3.1 e 5.3.2 sono raccolti i risultati ottenuti nella quarta sezione del questionario preliminare, raggruppati per tipologia di risposta. Nell'analisi si vuole evidenziare se gli allievi hanno risolto correttamente i problemi e, soprattutto, quale registro semiotico hanno adottato per formulare la soluzione.

Tabella 5.3.1 – Risultati *prima* dell'intervento

problemi	**C**orretto	**N**on **C**orretto	**N**on **S**volto
1) di geometria	6	2	1
2) aritmetico	3	6	0

Tabella 5.3.2 – Metodi risolutivi *prima* dell'intervento

Metodi risolutivi	**problema 1)**	**problema 2)**
registro aritmetico	0	5
formula inversa	7	0
equazione	1	0
registro schematico	0	1
per tentativi	0	2
altro	0	1

La maggior parte degli allievi risolve correttamente il problema di geometria, applicando la formula inversa, modalità di lavoro alla quale fa capo abitualmente.

Per risolvere la situazione aritmetica, gli allievi devono comprendere e impostare la relazione di uguaglianza che vincola i dati contenuti nel testo. Tre allievi comprendono la relazione e individuano la soluzione correttamente: due di loro procedendo per tentativi e uno organizzando uno schema strutturato. La maggior parte degli studenti tenta una risoluzione di tipo aritmetico, effettuando operazioni che non tengono conto della relazione di uguaglianza menzionata precedentemente.

Con i dati raccolti dopo l'intervento (tabella 5.3.3 e 5.3.4) si sono osservati tre aspetti: la traduzione del problema nel linguaggio algebrico, la correttezza della soluzione e il registro semiotico utilizzato per individuarla. Agli allievi è richiesta la traduzione del problema, ma è lasciata libertà di scelta su come risolverlo.

Tabella 5.3.3 – Risultati *dopo* l'intervento

problemi	**traduzione**			**soluzione**		
	C	NC	NS	C	NC	NS
1) aritmetico	9	0	0	8	1	0
2) di geometria	5	2	2	6	2	1
3) aritmetico	5	4	0	4	4	1

Tabella 5.3.4 – Metodi risolutivi *dopo* l'intervento

Metodi risolutivi	**problema 1)**	**problema 2)**	**problema 3)**
registro aritmetico	0	0	1
formula inversa	0	2	0
equazione	8	4	7
schema a frecce	0	2	0
per tentativi	1	0	0

Tutta la classe traduce il primo problema nel linguaggio algebrico e, fatta eccezione per un allievo, riesce a risolverlo lavorando con l'equazione.

Più della metà degli studenti traduce correttamente le due successive situazioni nel linguaggio algebrico e tenta di individuarne la soluzione secondo le modalità descritte nella tabella 5.3.4.

Sul piano individuale i risultati sono soddisfacenti: due allievi traducono 3 problemi correttamente, sei allievi traducono 2 problemi in modo esatto e un allievo solamente un problema.

La tabella 5.3.5 permette di effettuare un confronto tra i metodi risolutivi adottati, prima e dopo l'intervento, relativi alle due tipologie di problema presentate (geometrico e aritmetico).

Tabella 5.3.5 – Confronto dei metodi risolutivi *prima* e *dopo* l'intervento

problema	**metodo risolutivo**	**prima**	**dopo**
geometrico	formula inversa	7	2
	schema a frecce	0	2
	equazione	1	4
aritmetico	registro aritmetico	5	1
	per tentativi	3	1
	equazione	0	7-8

Appare evidente che gli allievi, in generale, abbiano cambiato il loro modo di risolvere i problemi. Se nella fase preliminare la quasi totalità del gruppo risolveva un problema geometrico mediante la formula inversa, dopo l'intervento emergono modalità risolutive più differenziate. Quattro allievi ricorrono all'equazione e due utilizzano lo schema a frecce.

Prima dell'intervento, per risolvere i problemi aritmetici nessuno utilizzava un'equazione. Al contrario, nella fase successiva sette allievi su nove ne fanno uso. Il registro aritmetico, risultato inefficace per questa tipologia di problemi, viene abbandonato ad eccezione di un allievo.

6. Risposte alle domande di ricerca

R1. Relativamente alla domanda di ricerca *D1,* si ritiene di poter confermare l'ipotesi *I1* per quanto riguarda i seguenti aspetti:

- La maggior parte degli allievi di terza, corso base, identifica nell'equazione un calcolo o una procedura per individuare un numero sconosciuto e nessuno tra loro è in grado di formalizzarne il concetto. Dall'analisi, in particolare, si denota che nessun allievo ha colto il tratto caratterizzante più importante dell'equazione, cioè che si tratta di un'uguaglianza.
- La metà degli studenti riconosce come equazioni scritture nelle quali l'incognita si trova a sinistra dell'uguale.
- La maggior parte degli allievi non mette in relazione l'equazione con la risoluzione di problemi.
- Gli studenti, fatta eccezione di uno, non utilizzano l'equazione per risolvere i problemi.

Non è invece possibile confermare l'ipotesi per cui gli allievi considerano un'equazione le scritture in cui l'incognita è rappresentata dalla lettera x e solamente un allievo ha, quale immagine mentale di equazione, una qualsiasi scrittura contenete una variabile.

Alcune immagini mentali degli allievi hanno rivelato due importanti ostacoli all'apprendimento del significato di equazione:

- Essi ritengono che l'equazione sia un calcolo e che l'incognita si trovi a sinistra del segno uguale. Questa particolarità ostacola la costruzione del concetto di equazione quale uguaglianza, elemento invece determinante per la sua caratterizzazione.
- L'equazione non è contestualizzata all'interno di una situazione problema, ma vista piuttosto come un oggetto matematico fine a se stesso.

R2. Per quanto concerne la domanda di ricerca *D2*, è possibile affermare che gli allievi hanno una maggior consapevolezza intorno al significato di equazione, in riferimento alla definizione data nel quadro teorico:

- L'immagine mentale che si è evidenziata nei TEPs rivela un elemento importante per la caratterizzazione del concetto di equazione, ovvero la relazione di uguaglianza.
- Tutti gli studenti, fatta eccezione per un allievo, hanno tentato di tradurre le situazioni problema nel linguaggio algebrico, con più o meno successo. Solamente un allievo risolve i due problemi

aritmetici per tentativi e risale solo in un secondo tempo alla messa in equazione (per soddisfare la richiesta della consegna), mentre per il problema di geometria ricorre direttamente alla formula inversa. Per questo allievo è ancora determinante individuare subito il *prodotto*, il risultato del problema.

- Otto allievi risolvono le equazioni facendo capo alla manipolazione "ragionata" e tutti, ad eccezione di uno, spiegano perché vengono svolti determinati passaggi. A tale proposito risulta difficile valutare se vi è comprensione o se la manipolazione "ragionata" sia divenuta un automatismo. Dalle risposte fornite da tre allievi appare invece chiaro che essi ne hanno colto il significato, in quanto non si limitano a descrivere le operazioni effettuate, ma motivano le scelte parlando di "operazione inversa" e "mantenere l'uguaglianza". Solo un allievo dichiara di "aver spostato lettere e numeri da una parte all'altra cambiando i segni".
- I dati raccolti con i questionari non permettono di individuare in modo esaustivo se gli allievi sappiano contestualizzare una scrittura formale o se essa venga gestita in modo meccanico. I risultati evidenziano che gli allievi sanno giustificare in modo coerente le proprie scelte quando si tratta di individuare le scritture che non corrispondono a delle equazioni.

L'analisi concernente la risoluzione di problemi mette in luce che gli allievi hanno cambiato il loro modo di affrontare e risolvere i problemi. Dopo l'intervento, solo due allievi hanno utilizzato la formula inversa, per affrontare la situazione di geometria. Si ricordi che durante la fase preliminare sette studenti avevano usato questo approccio. Si osserva inoltre che prima dell'intervento nessuno ha tentato la risoluzione del problema aritmetico attraverso un'equazione, mentre nella fase conclusiva ben sette allievi ne hanno fatto uso.

7. Conclusioni

Con questa ricerca non si pretende di dare una risposta esaustiva alla domanda se sia possibile rivestire di significato i concetti matematici ed in particolare le equazioni. Il campione di indagine coinvolto è composto da un numero troppo esiguo di allievi e il lavoro è durato solo due mesi. Per potersi accertare che un concetto sia stato acquisito e compreso pienamente è necessario un lasso di tempo maggiore. Nonostante ciò, è possibile concludere che l'intervento ha portato dei cambiamenti negli allievi coinvolti. Le immagini mentali, sottoposte a sollecitazioni diverse, si sono modificate e avvicinate al modello adeguato atteso dal docente per degli allievi di terza, corso base. Sono emersi gli elementi essenziali caratteristici del concetto e l'equazione è stata rivestita del suo aspetto più importante: si tratta cioè di un potente strumento (anche se non l'unico) per risolvere problemi. Il processo didattico risulta essere efficace per un primo approccio all'argomento, in quanto i diversi registri semiotici hanno permesso di "vedere" l'equazione da più punti di vista e di fornire degli strumenti di lavoro differenziati per gli allievi. A tale proposito risulta significativa la testimonianza di un allievo particolarmente debole:

> *"Ci sono vari modi per esprimere le equazioni. Consiglierei di cominciare con il calcolo pittorico perché può esprimere qualcosa di più concreto."*

Il progetto potrebbe essere applicato anche in una seconda media, dove si inizia a costruire il concetto in questione.

Rimane aperta la domanda se gli allievi, dopo questo tipo di intervento, siano meno dipendenti dagli aspetti sintattici e dalle regole formali. Durante le attività proposte sono riusciti a raggirare le "formule inverse", ma per poter rispondere alla domanda occorre del tempo. Bisognerà valutare in che misura, durante le prossime attività, gli allievi useranno le equazioni spontaneamente per risolvere i problemi.

La ricerca non ha preso in considerazione i miglioramenti di ogni singolo allievo, riferiti a una valutazione sommativa. Sarebbe interessante indagare se un approccio didattico di questo tipo, che mira a costruire il significato di equazione, permetta agli allievi di migliorare anche le proprie competenze nella risoluzione di problemi.

8. Bibliografia

D'Amore, B. (1999). *Elementi di Didattica della Matematica.* Bologna: Pitagora Editrice.

D'Amore, B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica.* Bologna: Pitagora Editrice.

Doretti, L., & Salomone, L. (2005). Avvio al concetto di equazione con i problemi del RMT. *Atti Arco di Trento*, 235-244.

Duval, R. (1993). Registres de représentations sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5*, 37-65.

Maier, H. (2000). Come usare testi scritti da allievi nella didattica della matematica. *Bollettino dei Docenti di Matematica, 41*, 59-70. Bellinzona: DECS.

Malara, N., & Navarra, G. (2003). *Quadro teorico di riferimento e glossario*. Bologna: Pitagora Editrice.

Medici, D., & Rinaldi, M. G. (2005). Messa in formula e risoluzione di equazioni e sistemi lineari con i problemi del RTM. *Atti Arco di Trento*, 245-253.

Radford, L. (2004). La generalizzazione matematica come processo semiotico. *Bollettino dei docenti di matematica, 49*, 39-53. Bellinzona: DECS.

Sawyer, W. W. (1974). *Guida all'insegnamento della matematica. 1.Algebra intuitiva.* Torino: Boringhieri editori.

Vygotskij, L. S. (1962). *Thought and language.* Cambridge: MIT Press.

9. Allegati

Allegato A	Questionario preliminare
Allegato B	Progetto didattico
Allegato C	Questionario conclusivo
Allegato D	Tabelle raccolta dati
Allegato E	Manipolazione ragionata - esempi

Questa pubblicazione, *LE EQUAZIONI TRA SIGNIFICATO E SINTASSI*, scritta da LORENZA PORTERI FERDANI, è rilasciata sotto Creative Commons Attribuzione – Non commerciale 3.0 Unported License.