Scuola universitaria professionale della Svizzera italiana
Dipartimento formazione e apprendimento

SUPSI

LAVORO DI DIPLOMA DI

GIUSEPPE PINCOLINI

MASTER OF ARTS IN INSEGNAMENTO PER IL LIVELLO SECONDARIO I

ANNO ACCADEMICO 2016/2017

IL RUOLO DEL DOCENTE NELLA GESTIONE DELLA MESSA IN COMUNE

RICERCA ESPLORATIVA SULLE PRATICHE D'INSEGNAMENTO IN UN CONTESTO DI PROBLEM SOLVING MATEMATICO

RELATORE

PIER CARLO BOCCHI

“Se ho visto più lontano, è perché stavo sulle spalle di giganti.” *(Isaac Newton)*

Ringrazio la mia famiglia per avermi sostenuto e sopportato incondizionatamente durante la formazione e la stesura di questo lavoro.

Ringrazio tutti gli amici e colleghi con cui, in questi anni, ho condiviso un pezzo di strada, per avermi regalato idee, esperienze o anche solo una parola di incoraggiamento.

Ringrazio il mio relatore per avermi accompagnato con disponibilità e professionalità.

Sommario

1. Introduzione 1

2. Quadro teorico 2

Il problem solving matematico 2

Il problema 4

L'errore 5

Il ruolo dell'insegnante tra devoluzione e istituzionalizzazione 6

La messa in comune 8

Le strategie comunicative che favoriscono la partecipazione degli allievi 12

3. Obiettivo dello studio e domande di ricerca 13

4. Approccio metodologico. 15

5. Analisi e discussione dei dati 17

Sessione n. 1 (ottobre) 17

Analisi dell'episodio 5: la presentazione del gruppo Lu-Mi-Cr-Si 19

Sessione n. 2 (novembre) 21

Analisi dell'episodio 5: la presentazione del gruppo Si-Se-Ali-Aj 23

Sessione n. 3 (febbraio) 27

Analisi dell'episodio 4: la presentazione del gruppo Si-Se-Lu 28

Analisi dell'episodio 5: la presentazione del gruppo Ja-Os-Car 30

Analisi dell'episodio 7: la presentazione del gruppo Ca-Ye-Ali-Aj 34

6. Conclusioni 40

7. Bibliografia 43

8. Allegati 46

1. Introduzione

Il presente lavoro di diploma ha costituito l'opportunità di riflettere sul ruolo dell'insegnante in una fase molto circoscritta ma piuttosto ricorrente nelle lezioni scolastiche, quella della messa in comune. Quando questa fase si svolge in forma di discussione tra gli allievi, si verifica la condivisione e il confronto delle soluzioni e gli allievi possono costruire il proprio sapere.

In più, poiché per scelta operativa il docente coinvolto era il sottoscritto, è stata anche l'occasione di una maturazione e di una crescita professionale con l'acquisizione di una maggiore consapevolezza delle tecniche di conduzione di una discussione collettiva e delle conseguenze dei miei interventi sul processo di apprendimento degli allievi

Infine, dovendo individuare su quali tematiche incentrare la fase di una messa in comune, la scelta è caduta, quasi naturalmente per preferenze personali, sulla risoluzione di problemi. Esso, nella scuola, è un tema dalle connotazioni ambivalenti, al tempo stesso desiderabile e temibile. Desiderabile perché offre agli allievi la possibilità di svilupparsi come futuri cittadini che possono esercitare un ruolo attivo e consapevole nella società attraverso una competenza quanto mai richiesta in ogni ambito a partire da quello lavorativo. Temibile perché richiede al docente di muoversi su un terreno instabile, con pochi riferimenti. Allora, se da una parte la matematica, con gli aspetti di astrazione, di modellizzazione, di ricerca di regolarità, può dare un grande contributo allo sviluppo di questa competenza dall'altra, essa rappresenta una delle sfide più complesse che un docente di matematica può affrontare nelle aule della scuola dell'obbligo.

2. Quadro teorico

Il presente lavoro di diploma ha costituito l'opportunità di riflettere sul ruolo dell'insegnante in una fase molto circoscritta ma piuttosto ricorrente nelle lezioni scolastiche, quella della messa in comune. Quando questa fase si svolge in forma di discussione tra gli allievi, si verifica la condivisione e il confronto delle soluzioni e gli allievi possono costruire il proprio sapere.

Il presente lavoro ruota attorno a due poli tra loro fortemente interconnessi: il problem solving matematico e il ruolo del docente nella fase di messa in comune, perciò, nel delineare il quadro teorico sottostante, sarà necessario fare riferimento a entrambi questi poli.

Le parole chiave possono essere organizzate all'interno della seguente mappa concettuale in cui, con colori di sfondo differenti, è stato evidenziato il triangolo didattico (Martini, 2001).

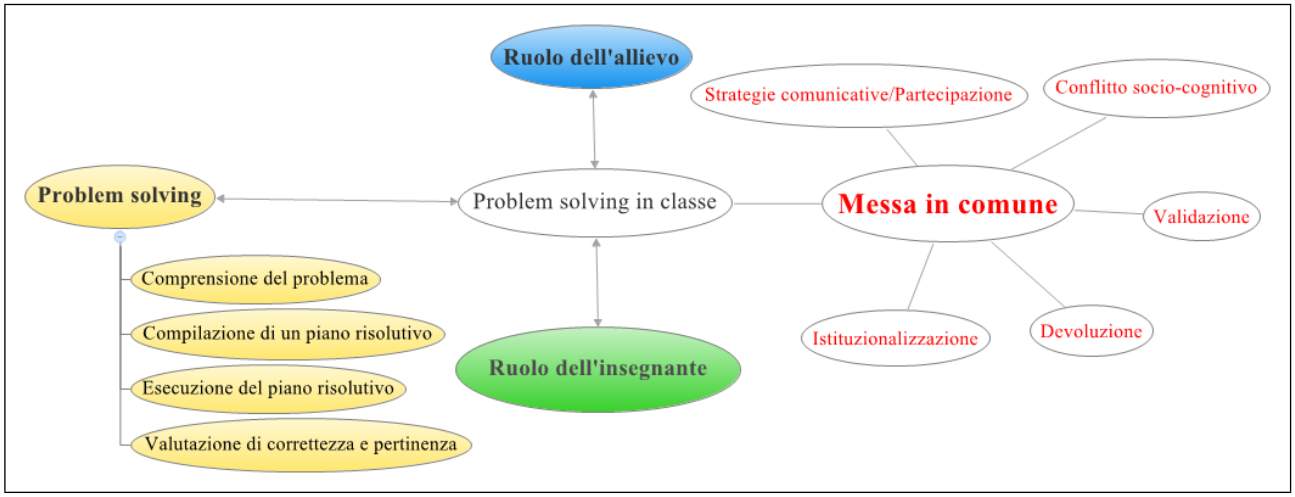


Figura 2-1 – I concetti chiave del quadro teorico di riferimento

Il problem solving matematico

Occuparsi di problem solving nella scuola media è importante per almeno tre ragioni:

1. la prima è legata alla società nella quale viviamo. Non c'è ricerca di personale che non preveda, tra i *soft skills*, la capacità di problem solving. Il World Economic Forum, il quale ogni 5 anni stila

un elenco delle 10 competenze più desiderabili a livello globale nei 5 anni successivi, immancabilmente pone il problem solving complesso al primo posto di tale elenco[1].

2. La seconda è legata alla formazione umana e culturale degli allievi. L'attività di risoluzione di problemi complessi insegna ai giovani la serena pazienza a non volere tutto e subito, la capacità di non precipitarsi alla conclusione di ciò che si sta facendo, mantenendo sotto controllo l'ansia che vorrebbe che ci fosse già la soluzione pronta, gestendo le proprie emozioni, verificando l'attendibilità e la pertinenza della soluzione trovata. Questo obiettivo, non completamente raggiungibile in classe, è sicuramente l'esito di un processo lungo e trasversale, a cui il lavoro di ogni adulto, dentro e fuori la scuola, deve contribuire.

3. La terza riguarda più specificatamente l'area matematica.

Il Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese, riconosce un valore all'attività di risoluzione dei problemi ad esempio quando si dice (2015):

> Gli allievi devono essere stimolati a una continua interpretazione e verbalizzazione di idee, intuizioni e proposte, evitando che in loro subentri la paura di commettere errori e il tentativo di riprodurre in modo acritico e impersonale definizioni, formule e procedimenti standard. […] È auspicabile che l'acquisizione di competenze da parte degli allievi avvenga a partire da situazioni-problema efficaci, significative e stimolanti, a volte più vicine alla vita quotidiana a volte più intrinseche alla matematica stessa e che acquistino senso per gli allievi. (p. 140)

Inoltre, tra i traguardi di competenza al termine del 2° ciclo, si precisa che l'allievo "comprende e risolve con fiducia e determinazione situazioni problema in tutti gli ambiti di contenuto previsti […], legate al concreto o astratte ma partendo da situazioni reali, mantenendo il controllo critico sia sui processi risolutivi sia sui risultati, esplorando e provando diverse strade risolutive" (p. 148).

Di conseguenza, occuparsi di problemi alla scuola dell'obbligo è quanto mai doveroso, come parte dello sviluppo delle competenze non solo ascrivibili all'area matematica ma anche personali a cui ogni disciplina dovrebbe contribuire.

---

[1] The future of jobs report (2016) http://reports.weforum.org/future-of-jobs-2016/

Il problema

"Un problema sorge quando un essere vivente ha una meta, ma non sa come raggiungerla". Questa frase di Duncker (1935) può essere considerata una definizione di problema nel senso in cui si è voluto trattarlo in questo lavoro. Anche per Polya (1967, citato da D'Amore, 1993, p. 23)

> "[…] risolvere problemi significa trovare una strada per uscire da una difficoltà, una strada per aggirare un ostacolo, per raggiungere uno scopo che non sia immediatamente raggiungibile. Risolvere problemi è un'impresa specifica dell'intelligenza e l'intelligenza è dono specifico del genere umano: si può considerare il risolvere problemi come l'attività più caratteristica del genere umano".

L'associazione ARMT che organizza annualmente il Rally Matematico Transalpino (RMT)[2] condivide questa definizione di problema quando nel proprio statuto dichiara che "È nel cercare di risolvere i problemi con i quali era costretto a confrontarsi che l'uomo ha cominciato ad elaborare le sue conoscenze matematiche. È lecito pensare che succeda la stessa cosa nel caso dell'allievo.". E infatti, per l'ARMT i problemi sono delle "situazioni per le quali non si dispone di una soluzione immediata e che conducono ad inventare una strategia, a fare tentativi, a congetturare, a verificare, a giustificare la soluzione, a spiegare le proprie procedure."

Fu lo stesso Polya (1967), sulla scorta della propria esperienza di insegnante di matematica, uno dei primi ad indicare i quattro stadi fondamentali del processo di soluzione dei problemi. Ciascuno di questi ha un'importanza particolare e pone per l'allievo delle difficoltà specifiche. Il primo stadio riguarda la *comprensione del problema*. Il secondo consiste nell'escogitare un *piano d'azione*. Il terzo richiede la messa in atto del *piano elaborato*, mentre il quarto ed ultimo stadio prevede l'*esamina critica* (valutazione della correttezza e pertinenza) del risultato ottenuto. Studi più approfonditi e successivi hanno messo in luce che il processo è di fatto molto più complesso. Esso infatti non è lineare, bensì simultaneo. Come afferma Monnier (2003, p. 26): "Ces processus ne

---

[2] Il Rally Matematico Transalpino (RMT) è un confronto fra classi, dalla terza elementare al secondo anno di scuola secondaria di secondo grado, nell'ambito della risoluzione di problemi di matematica. […]
Il RMT propone agli allievi:
- di fare matematica nel risolvere problemi;
- di apprendere le regole elementari del dibattito scientifico nel discutere e risolvere le diverse soluzioni proposte;
- di sviluppare le loro capacità, oggi essenziali, di lavorare in gruppo nel farsi carico dell'intera responsabilità di una prova;
- di confrontarsi con altri compagni, di altre classi.
[Estratto dal sito ufficiale del RMT - http://www.armtint.org/presentazione-rmt/presentazione-generale

forment pas une démarche linéaire, mais interagissent entre eux pour construire notre compréhension de la situation et de la tâche à effectuer, et engager notre démarche de résolution.”.

Inoltre Allard (1995) ha mostrato l’importanza anche di una fase successiva all’esamina della soluzione, quella della verbalizzazione/presentazione della procedura risolutiva adottata.

Come ci ricorda Zan (1995), se a Polya va l’indubbio merito di aver messo in evidenza il ruolo delle euristiche nel processo di *problem solving* e la necessità di apprenderle per diventare dei bravi solutori, bisogna riconoscere a Alan Schoenfeld l’aver mostrato come la conoscenza di tali euristiche, pur condizione indispensabile, non sia sufficiente. Infatti ciò che contraddistingue un bravo solutore da un solutore inesperto non è tanto e solo quali euristiche utilizzare ma anche *come e quando* queste debbano essere messe in atto e soprattutto quale controllo esercitare su di esse. Al riguardo Schoenfeld (1985) distingue le *decisioni tattiche* (che comprendono gli algoritmi e la maggior parte delle euristiche, già identificate da Polya) e le *decisioni strategiche* (che riguardano la gestione delle risorse nel corso del processo risolutivo). Si tratta dunque per questo autore di operare non solo sul piano cognitivo ma anche su quello metacognitivo. Nel caso dell’insegnamento-apprendimento del *problem solving*, questo impone quindi all’insegnante di favorire negli allievi anche i processi metacognitivi di auto-regolazione, articolati nelle tre fasi della *pianificazione*, del *monitoraggio* e del *controllo*.

Le considerazioni riportate sopra hanno definito e guidato la modalità di proporre delle attività di *problem solving* in classe di questa sperimentazione. Non solo si è cercato di rispettare le fasi sopracitate, ma si è concessa grande importanza alla fase di sviluppo della messa in comune, considerandola come un momento centrale non solo di presentazione della strategia risolutiva adottata ma anche di controllo. In effetti durante questo momento gli allievi erano messi nella condizione, grazie al confronto con il docente e i compagni (conflitto socio-cognitivo) di verificare l’attendibilità della loro risoluzione, prendendo coscienza dei loro errori.

L’errore

La possibilità di compiere errori, dovrebbe contraddistinguere qualunque autentico processo di insegnamento-apprendimento. Infatti, Popper sostiene che (1972)

> […] evitare errori è un ideale meschino: se non osiamo affrontare problemi che siano così difficili da rendere l’errore quasi inevitabile, non vi sarà allora sviluppo della conoscenza. In

> effetti, è dalle nostre teorie più ardite, incluse quelle che sono erronee, che noi impariamo di più. Nessuno può evitare di fare errori; la cosa più grande è imparare da essi. (p. 242)

Eppure è l'insegnante stesso in quanto adulto, a non volere che i suoi allievi commettano errori. In questa prospettiva si esprime anche Zan (2007), secondo la quale l'errore dell'allievo spesso disturba e infastidisce l'insegnante.

Secondo questa autrice, mettere in guardia gli allievi dagli errori tipici, pur essendo una pratica piuttosto diffusa, non è particolarmente efficace ai fini dell'apprendimento, perché in questo modo si aggirano i nodi critici sui quali è invece opportuno che gli allievi riflettano.

Questo è uno dei punti in cui si innesta il ruolo del docente.

Il ruolo dell'insegnante tra devoluzione e istituzionalizzazione

Se nel paragrafo precedente di fatto ci si è occupati del ruolo dell'insegnante nella fase di progettazione dell'attività ora ci si focalizzerà sulla realizzazione dell'attività stessa. Essa avviene attraverso due processi centrali, attorno ai quali, secondo Gérard Sensevy, può organizzarsi e articolarsi l'analisi dell'attività del docente: devoluzione e istituzionalizzazione.

Come ci ricorda Sensevy (2001, pp. 211 e 212) la devoluzione è definita da Brousseau (1998) come

> […] le processus par lequel le professeur confie aux élèves, pour un temps, la responsabilité de leur apprentissage. La dévolution est toujours, d'une certaine manière, dévolution d'un rapport à un milieu: l'élève doit assumer de travailler d'une manière déterminée dans un milieu déterminé, et accepter le fait que le professeur ne lui transmettra pas directement, pour un temps, les connaissances.

L'*istituzionalizzazione*, sempre definita da Brousseau (1998) è "[…] le processus par lequel le professeur montre aux élèves que les connaissances qu'ils ont construites se trouvent déjà dans la culture (d'une discipline), et par lequel il les invite à se rendre responsables de savoir ces connaissances".

In un'analoga prospettiva Sensevy, Mercier & Schubauer-Leoni (2000) hanno sviluppato una modellizzazione dell'azione professorale che, all'interno della relazione didattica, può essere sintetizzata dai seguenti quattro verbi: *definire*, *devolvere*, *regolare*, e *istituzionalizzare*.

Tale modellizzazione può essere considerata anche in relazione ad un'attività specifica come il *problem solving* in classe, ma anche in relazione ad altri oggetti di sapere (Bocchi, 2015).

Per quanto riguarda il problem solving nella fase di appropriazione del problema, ad esempio, è massima l'azione di devoluzione operata dall'insegnante. Affinché l'allievo si faccia carico fino in fondo del problema e si implichi nella fase euristica, occorre, infatti che egli si assuma la responsabilità della sua ricerca, che il problema posto diventi "effettivamente" un "suo" problema. Polya afferma che in questa fase (1971) "lo studente dovrebbe capire il problema e, di più, dovrebbe desiderare di conoscerne la soluzione". Nelle fasi di appropriazione e di ricerca, l'insegnante interviene per *definire* e *regolare* il milieu in cui l'allievo si trova ad operare.

Invece, nella fase di messa in comune, a conclusione della fase di elaborazione della soluzione, in cui si presentano e discutono le diverse risoluzioni adottate, è fondamentale l'azione di *istituzionalizzazione* dell'insegnante. Infatti, in tale fase, se adeguatamente accompagnato, non solo l'allievo presenta e condivide con gli altri allievi la sua strategia risolutiva, ma, ancor più importante, nello strutturare e rendere intellegibile ad altri ciò che ha scoperto, ne diventa più consapevole, situa le conoscenze costruite all'intero della cultura matematica di riferimento, sviluppa i processi natura metacognitiva di cui parlava Schoenfeld (1985).

Lungi dall'essere un momento consegnato esclusivamente alla responsabilità dell'insegnante, questa fase conclusiva, per essere efficace, richiede la presa di responsabilità dell'allievo. Di conseguenza per l'insegnante significa ricercare un delicato equilibro tra l'istanza di *istituzionalizzazione* e una nuova diversa necessità di *devolvere*. Non si tratta più di *devolvere* agli allievi la responsabilità della ricerca della soluzione del problema (iniziale), quanto piuttosto quella di *devolvere* il "nuovo" problema che consiste nel "cercare assieme un modo per validare la propria strategia e quella degli altri, assumendo un controllo critico del processo e del risultato". In questo senso, come osservano Pontecorvo, Ajello & Zucchermaglio (1991) quando insegnanti e allievi discutono assieme stanno, infatti, "in senso debole" risolvendo un problema, si tratta del problema di arrivare a una condivisione di significati diversi. Esse infatti in un passaggio osservano (1991):

> […] insegnante e alunni si comportano secondo particolari modi: essi infatti parlano insieme per capire qualche cosa che non è chiara, per scegliere fra interpretazioni diverse, insomma per "risolvere un problema" sia in senso forte come può avvenire in alcuni casi, ad esempio in ambito scientifico, sia in senso debole per arrivare a una condivisione di significati diversi. In ogni caso le discussioni sono un modo per promuovere e realizzare un cambiamento e per osservare le sue caratteristiche più distintamente. (p. 131).

Se come insegnante mi sono interessato all'intero processo di *problem solving*, in questo particolare lavoro di ricerca, mi sono soprattutto concentrato a indagare il mio ruolo in questa fase conclusiva, che prende forma appunto, a seguito di una ricerca a gruppi.

La messa in comune

Nell'ambito delle ricerche in didattica della matematica sono molti coloro che si sono interrogati sul valore delle discussioni a conclusione di un lavoro autonomo.

Claire Margolinas nei suoi lavori di ricerca, ha sviluppato soprattutto la riflessione sul ruolo del docente, tra devoluzione e istituzionalizzazione in relazione a tale fase, da lei denominata "fase di conclusione".

Nell'intento dichiarato di superare una visione riduttiva e semplicistica dei due processi di *devoluzione* e *istituzionalizzazione*, che li collocherebbe, rispettivamente, all'inizio e alla fine della lezione, Margolinas dice che: "Les phases de conclusion apparaissent comme un élément charnière entre les deux processus de dévolution et d'institutionnalisation". A questo proposito, a seconda del grado di responsabilità accordato agli allievi, distingue due fondamentali tipologie di "fasi di conclusione":

> 1) La phase de conclusion peut être une phase d'évaluation Nous dirons que la phase de conclusion est une phase d'évaluation quand, dans cette phase, la validité du travail de l'élève est évaluée par le maître sous la forme d'un jugement sans appel. [...]
>
> 2) La phase de conclusion peut être une phase de validation. Nous dirons que la phase de conclusion est une phase de validation si l'élève y décide lui-même de la validité de son travail. (1993, p. 29)

Nella prospettiva della co-costruzione di competenze di problem solving, soprattutto dello sviluppo dei processi cognitivi di regolazione e controllo, risulta allora evidente che il ruolo del docente nella fase di messa in comune, sia quello di favorire il più possibile la validazione delle strategie da parte degli allievi. In altre parole ciò significa che questi momenti della lezione debbano caratterizzarsi primariamente come *fasi di validazione,* secondo l'accezione sopra ricordata.

Altri ricercatori, nell'ambito della didattica della matematica, hanno indagato la fase di messa in comune. Nella forma di *discussione matematica* in classe, un contributo importante è stato dato da Bartolini Bussi, Boni & Ferri (1995). Le autrici definiscono metaforicamente la discussione

matematica come "una polifonia di voci articolate su un oggetto matematico (concetto, problema, procedura, ecc.), che costituisce un motivo dell'attività di insegnamento-apprendimento" (p. 7).

Nella loro caratterizzazione esse distinguono diversi tipi di discussione:

> A. Discussione di un problema, vista come parte dell'attività complessiva di problem solving, nei due aspetti di:
>
> A1. Discussione di soluzione, intesa come quel processo di tutta la classe che risolve un problema dato a parole con l'eventuale supporto di immagini o oggetti.
>
> A2. Discussione di bilancio, intesa come il processo di informazione, analisi e valutazione delle soluzioni individuali proposte ad un problema dato a parole, con l'eventuale supporto di oggetti o immagini, o nel corso di una discussione orchestrata dall'insegnante. (pp. 10-11).

La sperimentazione condotta in classe va nella direzione della discussione di bilancio secondo la classificazione ora esposta. Ancora Bartolini Bussi, Boni & Ferri (1995) dettagliano ulteriormente le caratteristiche di una simile discussione scomponendola in quattro fasi:

> (a) il vero bilancio, finalizzato al confronto delle strategie;
>
> (b) l'esplicitazione dei processi di soluzione, finalizzata alla ricostruzione e alla socializzazione dei processi individuali;
>
> (c) l'esplicazione dell'apprendimento, finalizzata alla identificazione degli elementi di novità introdotti dal problema nella storia individuale degli allievi e collettiva della classe;
>
> (d) l'istituzionalizzazione dell'apprendimento, finalizzata alla formulazione dei concetti e delle procedure che devono essere ricordati e al loro collegamento con le conoscenze precedenti. (pp. 11-12)

L'istituzionalizzazione appare particolarmente critica in un contesto di risoluzione di problemi poiché il sapere da istituzionalizzare non è un prodotto ma un processo e, a questo proposito, Bartolini Bussi, Boni & Ferri precisano che

> […] questa fase viene introdotta tutte le volte che il processo di discussione precedente ha fatto convergere gli interventi su una (o più di una) strategia risolutiva accettabile da un punto di vista adulto. Nei casi in cui questo è impossibile […] l'insegnante sospende l'istituzionalizzazione, eventualmente proponendo controesempi, ma comunque dichiarando che si tratta di un problema non maturo su cui sarà necessario ritornare. (Ibidem, p. 22)

Per assicurare, anche fase durante la discussione la presa di responsabilità dell'allievo, sono utili alcune indicazioni di metodo fornite da Zan & Di Martino (2017). I ricercatori suggeriscono infatti che l'insegnante non corregga immediatamente eventuali errori, non suggerisca la risposta corretta, ma faccia domande per stimolare processi di pensiero (ad esempio "Cosa avete fatto? Cosa state facendo? Cosa pensate/pensavate di fare?).

Il ruolo cruciale delle discussioni e, all'interno di esse, del tipo di interazione promosso dall'insegnante, nel processo di insegnamento-apprendimento è stato evidenziato dallo studio di Pontecorvo, Ajello & Zucchermaglio (1991) che rimane tuttora un riferimento importante per chi si occupa di questa tematica.

Come sottolineano Pontecorvo, Ajello & Zucchermaglio (1991, p. 59) nella fase di discussione, uno dei ruoli principali dell'insegnante è di favorire il confronto tra pari:"i conflitti interindividuali tra diverse soluzioni conducono i bambini a coordinare i loro punti di vista in un nuovo sistema in cui giungono ad accordarsi attraverso il superamenti di "squilibri" esterni ed interni". Le autrici, riprendendo la distinzione tra squilibrio interindividuale e intraindividuale di Gilly (1988) sottolineano che "il conflitto socio-cognitivo è prodotto da conflitti interindividuali: la situazione di co-risoluzione rivela differenze di risposte dovute alle differenti centrazioni di punti di vista tra i partecipanti e produce pertanto uno squilibrio interindividuale che è alla base di quello intraindividuale (p. 59) In tale situazione di squilibrio vi è apprendimento.

Durante la discussione, nella (ri)costruzione di un ragionamento, si sviluppa apprendimento anche perché, come definito dalle ricercatrici, si produce un "pensare assieme" che non corrisponde al pensare di qualcuno:

> Il ragionamento su di un argomento specifico, fra quelli proposti, si costruisce spesso attraverso il contributo tra più interlocutori: in altri termini ha luogo un "pensare insieme" che non corrisponde esattamente al pensare di qualcuno e che ancora non si ritrova in quello. […] È quello che abbiamo chiamato la sindrome dei tre nipotini di Paperino, i quali dicono ciascuno un pezzo di frase – come se avessero una sola "mente" – e che nei bambini reali da noi osservati si manifesta nella disponibilità, fino alla permeabilità, verso il pensiero altrui e nella conseguente possibilità di costruire insieme un pensiero-discorso. (Pontecorvo, Ajello & Zucchermaglio, p. 79)

Per tale motivo, gli interventi degli insegnanti, secondo le autrici, devono caratterizzarsi in primo luogo per

> la forte accentuazione metodologica, nel senso di fare attenzione ai modi di elaborazione dell'informazione, alla rimessa in circolo di aspetti importanti che non hanno ricevuto abbastanza attenzione da parte degli interlocutori: insomma non devono affrettarsi a fornire "risposte" che possono essere premature, né a risolvere il problema in discussione sul piano oggettivo, ma su quello che è veramente comprensibile agli alunni. (Ibidem, p. 132)

Invece, solitamente questo non avviene. Pontecorvo, Ajello & Zucchermaglio (Ibidem) parlano, a questo proposito di uso depotenziato della discussione. Gli interventi del docente sono spesso predominanti e direttivi e vertono sul bisogno di fornire risposte e risolvere i momenti di incertezza. Come ci ricordano le stesse autrici "È stato dimostrato che in media gli insegnanti parlano per il 70% del tempo, e che tutti – indipendentemente dallo stile educativo più o meno caratterizzato dall'uso prevalente di un'influenza "diretta" e quindi direttiva sull'allievo – usano largamente le domande come essenziale strategia comunicativa (Dillon, 1987, ripreso da Pontecorvo, Ajello & Zucchermaglio, p. 63)

Non si tratta nemmeno, semplicemente (o semplicisticamente) di ribaltare il tempo accordato agli allievi e "far parlare di più loro". Esse ci ricordano che esiste un "uso depotenziato della discussione", in altre parole (1991)

> […] la riduzione della frequenza di intervento [del docente] non è sempre distintivo di una migliore gestione, poiché per alcuni insegnanti ciò significa "lasciar dire" gli alunni senza far nulla, anche quando si manifestano errori e incomprensioni. In altre parole il maggior tempo a disposizione degli alunni non è sempre un'occasione per rielaborare le conoscenze, ma solo un modo per "far parlare tutti. (Ibidem, p. 138)

Di conseguenza, la partecipazione di tutti gli allievi alla discussione non garantisce di per sé che l'insegnante svolga un ruolo adulto propulsivo, anche se non direttivo: "[…] di fatto parlare insieme e, se possibile, tutti, è una condizione necessaria ma non sufficiente per costruire insieme un ragionamento altrimenti troppo "faticoso" da far da soli.". (Ibidem, p. 138)

Dal docente, durante la discussione, ci si aspetta molto di più: la capacità di diffondere tratti pertinenti dell'azione, indirizzare l'attenzione verso aspetti non sufficientemente colti, fornire criteri di selezione e/o di analisi, focalizzare progressivamente i problemi, offrire sintesi.

Le strategie comunicative che favoriscono la partecipazione degli allievi

Come ci ricordano Bartolini Bussi, Boni & Ferri (1995) per orchestrare una discussione matematica il docente è chiamato a mettere in atto diverse strategie comunicative. Quella che viene indicata come principale, riprendendola dai lavori di Rogers (1973) in ambito clinico e successivamente da Lumbelli (1972) all'interno del processo di insegnamento-apprendimento, è la tecnica del *rispecchiamento* o *ripresa ad eco*. Questa tecnica, nata all'interno del *colloquio non direttivo* ha lo scopo di favorire l'instaurazione di una situazione comunicativa efficace, basata sull'ascolto attivo. Altre tecniche utili richiamate da Lumbelli (Ibidem) sono la *riformulazione o parafrasi* di quanto detto dall'interlocutore (in particolare dall'allievo) e l'utilizzo di *domande aperte*.

Infine, nella conduzione di una lezione sono importanti anche le tecniche rogersiane del *riepilogo* o *sintesi* del pensiero espresso dall'interlocutore, che nel caso dell'insegnante si configurano come tecniche per riorganizzare ed esplicitare le conoscenze e le scoperte degli allievi.

Nel presente lavoro di ricerca, si è cercato di attivare queste tecniche, proprio nell'intento di promuovere negli allievi la partecipazione attiva.

3. Obiettivo dello studio e domande di ricerca.

Il principale tema di ricerca affrontato nel presente studio è quello del ruolo dell'insegnante nella gestione delle messe in comune.

Tale ruolo è osservato nella fase conclusiva di un'attività di *problem solving* ovvero nella fase di presentazione delle strategie risolutive e di discussione collettiva, più in generale durante la messa in comune delle conoscenze e delle strategie, per la condivisione e l'istituzionalizzazione del sapere in gioco.

L'obiettivo è quello di indagare le dinamiche interazionali tra docenti e allievi, centrando l'attenzione sul ruolo del primo in relazione allo sviluppo delle capacità di problem solving degli allievi e alla necessità di favorire la relativa presa di responsabilità.

Le ipotesi che si intendono verificare sono riassumibili nelle seguenti domande:

1. In che modo la modalità di conduzione della messa in comune da parte dell'insegnante influisce sull'attivazione dei processi cognitivi e metacognitivi fondamentali nell'attività di problem solving degli allievi?

Ritengo che il condurre la fase della messa in comune in modo direttivo piuttosto che partecipativo produca risultati differenti. Più gli interventi del docente promuovono, anche in questa fase, la presa di responsabilità degli allievi, la discussione orizzontale, il confronto diretto e autentico, la possibilità di validare o confutare autonomamente i risultati e le scoperte, più si favorisce negli allievo lo sviluppo delle risorse cognitive, grazie alla varietà di strategie e euristiche, e metacognitive, come ad esempio di controllo, necessarie al *problem solving*.

Più in particolare:

2. Quali interventi del docente durante la messa in comune di strategie risolutive diverse favoriscono o, al contrario, inibiscono, il coinvolgimento attivo e la responsabilizzazione degli allievi?

L'ipotesi è che gli interventi del docente atti a regolare il tempo didattico, i turni di parola, a favorire l'insorgere di conflitti socio-cognitivi tra gli allievi, a valorizzare il ruolo produttivo dell'errore e a sollecitare l'ascolto attivo e la partecipazione di tutti gli allievi, possano in misura maggiore favorire un dibattito argomentativo nel processo di risoluzione di un problema.

4. Approccio metodologico.

Il campione della presente ricerca è costituito da una classe seconda di scuola media nella quale sono docente di matematica.

Per indagare il problema conoscitivo ho svolto una ricerca di tipo qualitativo che ha preso corpo da alcune mie lezioni effettuate in questa classe. Queste ultime prevedevano, dopo un'attività di sperimentazione e ricerca di strategie risolutive di situazioni-problematiche, una fase collettiva di presentazione, confronto e discussione. Nonostante si siano affrontate in classe diverse sessioni dedicate al problem solving, in questa ricerca ho scelto di analizzarne solo 3.

Particolarmente delicata e non semplice è stata l'identificazione dei problemi da proporre. Per avere delle caratteristiche invarianti da un problema a un altro, le situazioni di *problem solving* in aula dovevano:

- essere adeguate alle conoscenze degli allievi impegnandoli nella zona di sviluppo prossimale;
- prestarsi ad una risoluzione collaborativa e senza l'aiuto del docente
- permettere più strategie risolutive per dare il maggior numero di possibilità agli allievi di individuare una qualche risoluzione al problema e ottenere una più ricca e dibattuta fase di messa in comune.

In tal senso la banca dati dei problemi messa a disposizione dell'Associazione Rally Matematico Transalpino si è rivelata una fonte preziosa di materiali (tutti i problemi proposti nelle 24 edizioni del rally) classificati per tipologia di problemi, argomento, età di riferimento e corredati di analisi a priori con le possibili strategie risolutive. I problemi proposti nella sperimentazione sono stati prelevati tra quelli del RMT. Inoltre segnalo che caratteristiche distintive e valore aggiunto del RMT che lo differenziano da altre competizioni matematiche sono proprio la richiesta esplicita di descrivere il procedimento risolutivo, oltre la necessità di collaborare assieme alla ricerca di una soluzione condivisa.

Ogni lezione dedicata al *problem solving* è strutturata secondo le fasi già indicate nel quadro teorico in cui però, la fase di ricerca di una soluzione, è stata suddivisa in due: la prima a coppie di circa una decina di minuti e la seconda a gruppi di 4 ottenuti unendo due coppie. Questa scelta è stata fatta per agevolare gli allievi sia nella fase di ricerca che nella fase di presentazione, facendoli lavorare prima in un gruppo ristretto con maggiore possibilità di guadagnare consapevolezza del proprio pensiero.

Le fasi di messa in comune di ogni lezione sono state videoregistrate, i dialoghi trascritti in protocolli, decomposti in episodi e analizzati per qualità e scansione temporale. Tutto ciò al fine di individuare nessi causa-effetto e di orientare gli interventi successivi oltre che documentare a posteriori i processi attivati dagli allievi. In fase di analisi fine, sono state prese in considerazione solo alcuni degli episodi più salienti.

Sull'importanza di questo passaggio Bartolini Bussi sottolinea che:

"Solo sul protocollo trascritto sarà possibile compiere gli andirivieni che consentono l'analisi accurata della discussione. L'insegnante ricostruisce il legame tra la particolare discussione ed i motivi dell'attività; ricostruisce la costellazione di intenzione che ritiene aver guidato i suoi interventi. Suddivide poi la discussione in episodi: un episodio è costituito da una sequenza di enunciazioni consecutive dedicate allo stesso tema e caratterizzate dalla stessa forma; un nuovo episodio è introdotto […] quando viene modificato il tema oppure la forma del discorso." (1995, p. 27).

Malgrado l'interesse principale fosse osservare la discussione finale, ho scelto di videoregistrare anche le fasi precedenti per permettere di contestualizzare meglio quanto accadeva nella messa in comune vera e propria.

Le lezioni coinvolte nella ricerca hanno visto tre sessioni di *problem solving* in classe. Ogni lezione era caratterizzata da tre fasi: la fase di lancio del problema, la fase di risoluzione del problema prima a coppie e poi a gruppi e, in fine, la fase di presentazione e discussione delle risoluzioni (messa in comune). Le sessioni si sono svolte nei mesi di ottobre, novembre e febbraio dell'anno scolastico 2016-2017.

5. Analisi e discussione dei dati

Sessione n. 1 (ottobre)

Il primo problema proposto alla classe è intitolato "Le castagne di Carlo" ed è stato scelto tra quelli considerati adatti per la fascia 5ª SE – 2ª SM (v. analisi a priori ARMT allegata a p. 46) in modo da favorire le possibilità di riuscita dei vari gruppi.

In Figura 5-1 è riportato il testo del problema proposto.

Le castagne di Carlo

Carlo ha raccolto 81 chili di castagne. Comincia a metterle in tre cesti, uno piccolo, uno medio e uno grande.
Le castagne che mette nel cesto medio pesano il doppio di quelle che mette nel cesto piccolo.
Le castagne che mette nel cesto grande pesano il doppio di quelle che mette nel cesto medio.
Dopo aver riempito i tre cesti, gli restano alcuni chili di castagne, che sono esattamente la metà di quelli contenuti nel cesto grande.

Quanti chili di castagne mette Carlo in ogni cesto?

Quanti chili gli restano?

Spiegate come avete trovato le vostre risposte.

Figura 5-1 – Il testo del problema proposto in classe durante la prima sessione

La presente sessione di problem solving ha seguito la scansione temporale delle fasi come riportata in Tabella 5-1.

Tabella 5-1 – Struttura della sessione n. 1

Min.	**Fase dell'attività**	**Episodio**
0 – 5	Spiegazione dell'attività	Episodio 1. Esposizione della consegna e della modalità di lavoro. Distribuzione della scheda di lavoro
5 – 20	Risoluzione del problema	Episodio 2 Risoluzione a coppie
20 – 29		Episodio 3 Risoluzione a gruppi
29 – 38		Episodio 4 Risoluzione a gruppi con lucido di presentazione
38 – 41	Presentazione delle risoluzioni	Episodio 5 Presentazione gruppo Lu, Cri, (Mi, Si)
42 – 46		Episodio 6 Presentazione gruppo Al, Cam, Pa, (xx)
47 – 49		Episodio 7 Presentazione gruppo Car, Ye, (Os, Ni)

Analisi dell'episodio 5: la presentazione del gruppo Lu-Mi-Cr-Si

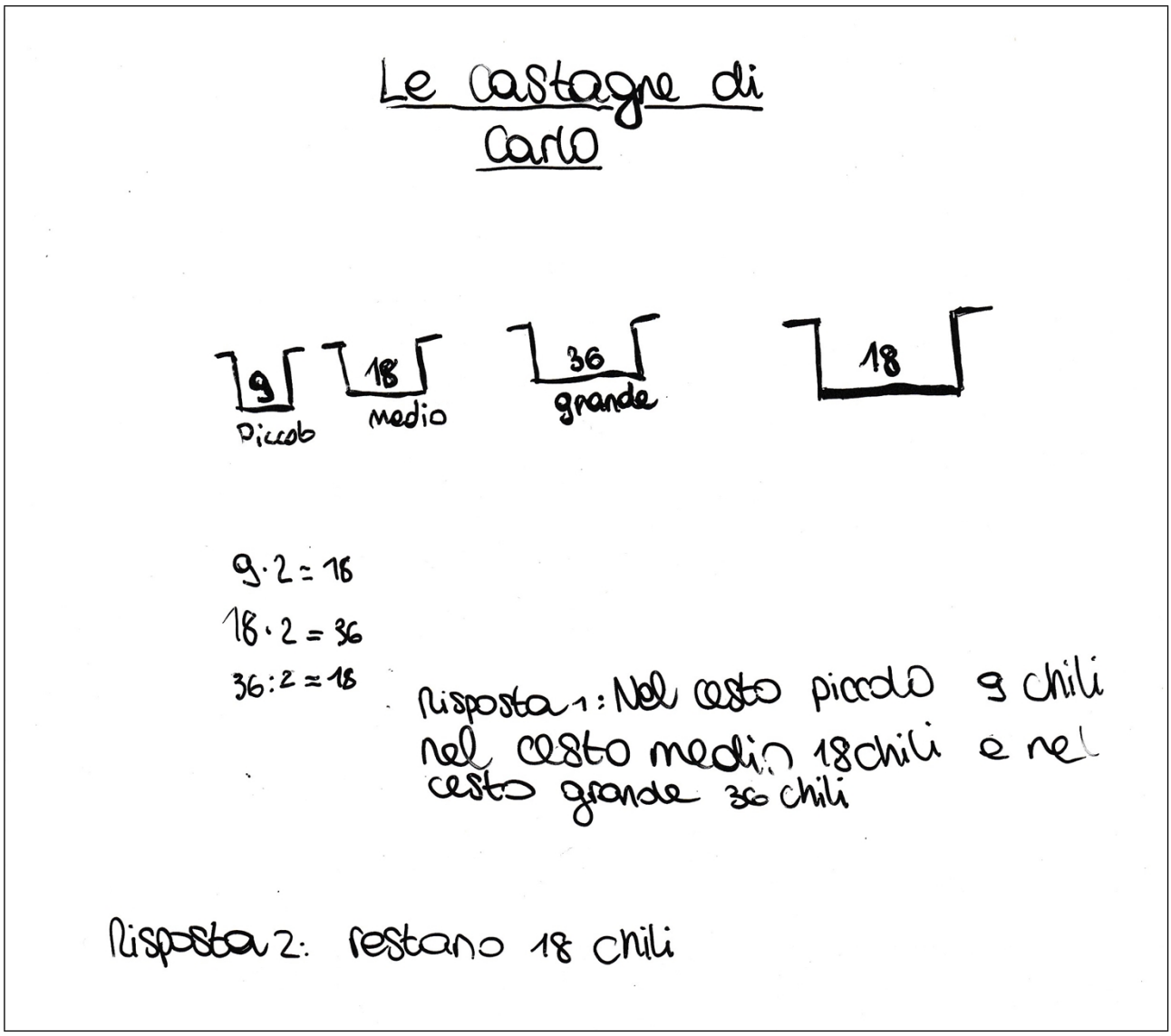


Figura 5-2 – La risoluzione del problema d parte del gruppo Lu-Mi-Cr-Si

Tabella 5-2 – Episodio 5 (38’30” – 40’58”)

2	Lu.	Noi abbiamo… cioè … abbiam fatto… eh… abbiam prima… fatto questi calcoli
3	**In.**	**Vedo che avete fatto anche dei disegni…**
4	Lu.	Sì, abbiamo fatto… all’inizio abbiamo fatto queste tre ceste e poi ne abbiamo aggiunta un'altra per i chili che rimanevano
5	**In.**	**Ok, quello che resta**
6	Lu.	Sì. E dopo abbiamo… cercato… abbiam fatto 9… abbiam provato a tentativi 9 per 2
7	**In.**	**Quindi questo 9 l’avete trovato… tu dici…**
8	Lu.	L’abbiam fatto a tentativi
9	**In.**	**A tentativi. Che numeri avete provato? Direttamente il 9?**
10	Si.	Io lo so: prima il 10
11	**In.**	**Avete provato con 10**
12	Si.	Poi l’11
13	**In.**	**Col 10 cosa succedeva?**
14	Si.	Arrivava all’80
15	**In.**	**Ad 80. Quindi avete detto: “aumentiamo allora” e avete provato con l’11.**
16	Si.	Sì
17	**In.**	**E com’è che siete scesi al 9 allora?**
18	Si.	Perché col 12 ormai era troppo
19	**In.**	**Perché col 12 superavate… ok… l’81…**
20	Lu.	Allora abbiam fatto… Sapevamo che nel cesto medio *[indica il disegno del cesto medio]* c’era il doppio *[indica il disegno del cesto piccolo]…*
21	**In.**	**Il doppio del piccolo, ok**
22	Lu.	E nel grande *[indica il disegno del cesto grande]* c’era il doppio del medio *[indica il disegno del cesto medio]*
23	**In.**	**… del medio, ok**
24	Lu.	*[…]* perché qua *[indica il disegno del cesto delle castagne restanti]* sono le castagne restanti
25	**In.**	**Che restano**
26	Lu.	Per cui abbiamo fatto 9, 18, 36
27	**In.**	**E resta esattamente quello che diceva il problema**
28	Lu.	Per cui quelle che restano sono queste
29	**In.**	**Perfetto, questo è quello che resta. Grazie.**

Le osservazioni che seguono, a proposito dell’episodio 5 della prima sessione si possono estendere tali e quali anche per gli episodi 6 e 7: per questa ragione questi ultimi episodi sono stati omessi per concentrare l’analisi solo sugli scambi più significativi.

Per quanto detto nel capitolo 2 a proposito della modalità di conduzione della discussione da parte del docente, si osserva che in questo episodio 5 la modalità di conduzione del docente risulta piuttosto direttiva. Il docente interviene sistematicamente dopo ogni battuta di un allievo per rispecchiare (v. turni di parola[3] 5, 11, 15, 23, 25), per riformulare (19, 21), per sintetizzare (27, 29) o per approfondire (3, 13, 17). La responsabilità ultima della ricostruzione e presentazione della strategia risolutiva sembra restare nelle mani del docente: è lui che detiene le redini della discussione e decide “la logica” con cui presentare i diversi passaggi del procedimento adottato.

[3] La numerazione in questo caso si riferisce ai turni di parola, in seguito abbreviato in tdp

Sessione n. 2 (novembre)

Il secondo problema proposto alla classe è intitolato "Frazione di un terreno" ed è stato scelto tra quelli considerati adatti per la fascia 1ª SM – 3ª SM (v. analisi a priori ARMT allegata a p. 47), perciò potenzialmente più impegnativo del precedente ma più inerente agli argomenti trattati in classe nel periodo immediatamente prima, ovvero le frazioni.

In Figura 5-3 è riportato il testo del problema consegnato agli allievi. Il problema coinvolge diverse nozioni di geometria piana tra cui la conservazione delle aree per rotazione e traslazione delle superfici e perciò si presta maggiormente ad una risoluzione grafica. Nello scegliere questo problema si è voluto favorire chi aveva una intelligenza più visiva, dopo aver lavorato prevalentemente sul registro numerico con la prima sessione. In questa occasione sono stati forniti dei supporti di aiuto (non previsti nella prima sessione): essi consistevano in fogli su cui era riprodotto o il disegno del campo in grande con possibilità di ritagliarlo liberamente per formare un puzzle o sei disegni del campo in piccolo con la possibilità di colorarli ed evidenziare trasformazioni successive (v. allegati a pp. 50 e 51).

Frazione di un terreno

Giuseppe possiede un appezzamento di terreno a forma di quadrato e, poiché è un po' giocherellone, lo divide con rette passanti per i vertici o per i punti medi (cioè i punti di mezzo) dei lati del quadrato.

Francesco riceverà in eredità la parte ombreggiata del terreno di suo padre Giuseppe.

Quale frazione del terreno riceverà Francesco?

Giustificate la vostra risposta.

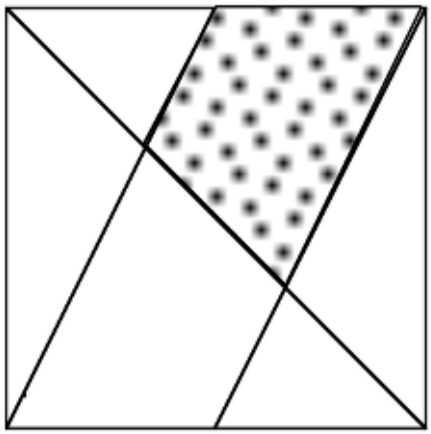


Figura 5-3 – Il testo del problema proposto in classe durante la seconda sessione

Questa sessione di problem solving si è svolta secondo la scansione temporale delle fasi mostrata in Tabella 5-3.

Tabella 5-3 – Struttura della sessione n. 2

Min.	Fase dell'attività	Episodio
0 – 6	Spiegazione dell'attività	Episodio 1. Esposizione della consegna e della modalità di lavoro. Distribuzione della scheda di lavoro
6 – 14	Risoluzione del problema	Episodio 2 Risoluzione a coppie
14 – 31		Episodio 3 Risoluzione a gruppi con disegno ingrandito
31 – 37	Presentazione delle risoluzioni	Episodio 5 Presentazione gruppo Si-Se-Ali-Aj
37 – 41		Episodio 6 Presentazione gruppo Lu-Ca-Pa-Ja
41 – 45		Episodio 7 Presentazione gruppo Al-Ni-Mi-Car
45 – 46	Conclusione	Episodio 8 Rinvio della conclusione delle presentazioni

Durante questa sessione di *problem solving* sono emerse alcune criticità.

Anzitutto nessun gruppo durante la risoluzione in classe ha scelto di utilizzare gli aiuti. È vero che essi sono stati proposti dopo che il lavoro di risoluzione era iniziato, ma è altrettanto vero che nessun gruppo ha sentito la necessità, per meglio comunicare e giustificare il proprio ragionamento di fronte agli altri, di utilizzare un metodo di esposizione più convincente di un disegno a mano libera.

Una seconda criticità si è prodotta in seguito alla necessità di gestire il comportamento inadeguato di un allievo durante la fase di lavoro a gruppi. Ciò non ha consentito al docente un'osservazione e un'interazione con i diversi gruppi tale da permettergli di comprendere a fondo le strategie risolutive adottate. Il docente perciò ha affrontato con insufficienti informazioni la fase di messa in comune rendendo difficoltoso il ruolo di "direttore d'orchestra".

Una terza criticità è legata alla natura stessa del problema che facilmente comportava una risoluzione fatta di superfici da sezionare e riposizionare ma che perciò richiedeva, durante la fase di presentazione-discussione, una notevole attenzione visiva da parte degli allievi. I soli commenti verbali, spesso fatti di frasi come: "questo pezzo assieme a questo formano questo", accompagnati da gesti, sono risultati insufficienti per una comunicazione efficace. Tutte le volte che gli allievi perdevano il contatto visivo con chi spiegava per mezzo della lavagna luminosa anche la comprensione veniva meno. Questa è la ragione delle ripetizioni delle esposizioni che si osservano negli episodi di seguito riportati.

Analisi dell'episodio 5: la presentazione del gruppo Si-Se-Ali-Aj

In Figura 5-4 è riportato il lucido utilizzato per la presentazione dal gruppo Si-Se-Ali-Aj mentre in Tabella 5-4 è trascritto l'intero episodio 5.

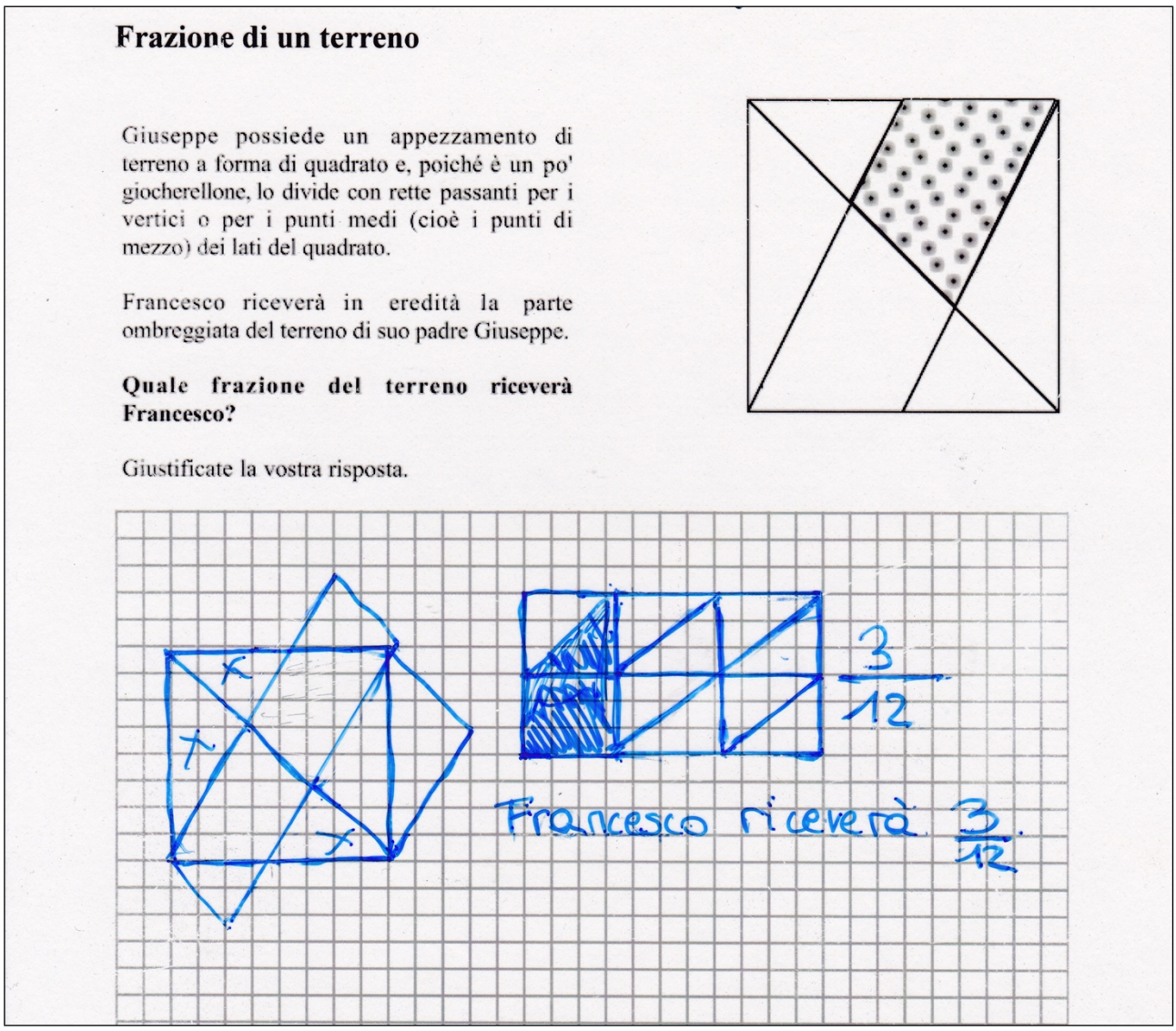
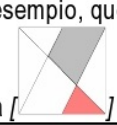
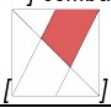
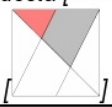
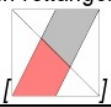
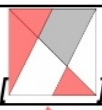
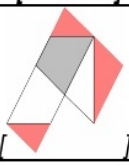
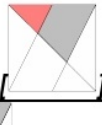
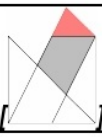
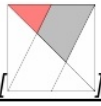
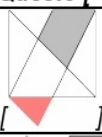
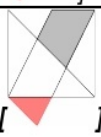
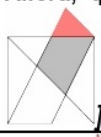
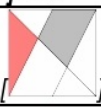
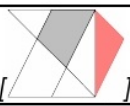
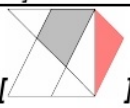
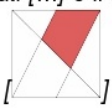
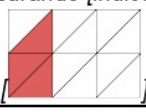


Figura 5-4 – Presentazione della risoluzione del gruppo Si-Se-Ali-Aj

Tabella 5-4 – Episodio 5 (31’00” – 35’53”)

1	**In.**	**Allora, ripeto: ci interessa come avete ragionato. Provate a farcelo capire. [...]**
2	Aj.	Allora, praticamente, guardando questo quadrato *[indica il disegno nel testo del problema]*, abbiamo capito che, per esempio, questa parte qua *[* *]* combacia con questa *[* *]* e fa un rettangolo, questa parte qua *[*  *]* combacia con questa *[*  *]* e questo *[*  *]* con questo *[*  *]*
3	**In.**	**Combacia... cosa intendi?**
4	Aj.	Nel senso che messe insieme formano un rettangolo
5	Ali.	*[indica il disegno di sinistra nella risoluzione]*
6	**In.**	**Come avete fatto a capirlo che “messe insieme formano un rettangolo”? Cosa significa quel disegno lì sotto?**
7	Aj.	Praticamente qua *[indica il disegno di sinistra nella risoluzione]* abbiamo preso le misure e abbiam provato a incollarle insieme
8	**In.**	**Ma li avete ritagliati?**
9	Aj.	No, non li abbiamo ritagliati. Cioè, abbiamo spostato
10	**In.**	**Li avete misurati**
11	Aj.	Li abbiamo misurati e li abbiamo ridisegnati della stessa misura
12	**In.**	**Ma sembrano più piccoli però qua...**
13	Aj.	Eh sì, ma perché...
14	**In.**	**... sui vostri fogli li avete fatti**
15	Aj.	Sui nostri fogli abbiamo soltanto cambiato...
16	**In.**	**Quindi avete trovato che:... Vediamo un po’. Questi qua con la crocetta *[*  *]* cosa sono?**
17	Aj.	Praticamente abbiamo cancellato questi *[* *]* e li abbiamo messi qua *[*  *]*
18	**In.**	**Ah. Quindi avete immaginato: tolgo questo... Questo *[*  *]* dov’è finito? Li sopra? *[*  *]***
19	Aj.	No mi sa che questo *[*  *]* è finito qua sotto *[*  *]*
20	**In.**	**Allora, questo *[* *]* l’avete messo qua *[*  *]* e questo *[* *]* l’avete messo lì *[*  *]*. Ok.**
21	Aj.	E l’altro *[*  *]* l’abbiamo messo lì *[*  *]*
22	**In.**	**E questo *[* *]* l’avete messo qua *[*  *]*.E cosa salta fuori dopo tutti questi spostamenti?**

23	Aj.	Saltano fuori 3 rettangoli che sono un po' storti, però dopo li abbiamo trasformati *[…]* e li abbiamo messi tutti insieme. E facendo un po' di misure abbiamo calcolato che questa qua *[*  *]* è quanto ha il figlio…
24	**In.**	**… Francesco**
25	Aj.	Francesco! E misurando *[indica il disegno di destra nella risoluzione]* (viene 110) abbiamo capito che nel quadrato questa *[*  *]* è l'area…
26	**In.**	**Ok. E quindi… Io però le misure non le vedo qua *[indica il disegno di destra nella risoluzione]*. Cosa avete trovato? Cosa avete fatto?**
27	Aj.	Abbiamo diviso tutti rettangoli a metà e li abbiamo divisi ancora a metà e sono identici a quelli piccolini
28	**In.**	**Allora. È chiaro il metodo che hanno usato?**
29	alc.	Sì
30	**In.**	**Sì? Però?**
31	Ye.	No
32	Ti.	La Ye. non ha capito
33	**In.**	**Potete chiedere se non avete capito**
34	Ye.	Non ho capito
35	**In.**	**Ye. dice di no. Cos'è che non hai capito?**
36	Ye.	Il metodo
37	**In.**	**Lei dice che non ha capito il metodo. E il primo passaggio l'hai capito con gli spostamenti che han fatto?**
38	Ye.	No
39	**In.**	**Volete provare a rispiegarlo in un altro modo?**

Anche in questa seconda sessione, come nell'estratto precedente, la conduzione del docente è ancora piuttosto "serrata", ma si appoggia prevalentemente a domande aperte. La strategia comunicativa con cui egli riesce a guidare "più o meno indirettamente" la presentazione da parte degli allievi è la combinazione di due azioni. il rispecchiamento associato alla richiesta successiva di approfondimento (3, 27, 33, 35). Si osserva inoltre che le interazioni tra gli allievi che presentano e quelli che ascoltano sono quasi assenti. Solo negli scambi 28-35, grazie all'intervento di sollecitazione del docente (28), si riscontra la presa di parola da parte di Ti e Ye.

In questo estratto, il docente ha un ruolo centrale nel mettere a tema la questione fondamentale della validazione della strategia seguita. Gli interventi del docente (6, 8, 10, 12), infatti, sono tutti approfondimenti che hanno lo scopo di suscitare negli allievi la necessità di provare la validità del loro procedimento, e, eventualmente, di mettere in crisi la loro certezza. Nessuno degli allievi del gruppo infatti aveva pensato di verificare mediante misure o in modo pragmatico (ritagliando o sovrapponendo) l'effettiva congruenza delle "pretese" figure trasformate. Tuttavia, sembra si tratti di un'esigenza solo dell'insegnante. Non ci sono interventi di altri allievi. Anche la necessità di chiarezza espositiva, a cui è dedicato il tdp 28, sembra essere appannaggio quasi esclusivo dell'insegnante e di pochi allievi (Ye e Ti). Come già evidenziato, Ye ammette di non aver capito (34), tuttavia l'insegnante non lascia spazio affinché possa esplicitare, come crede, l'aspetto non

chiaro. Subito (37) centra la questione sul primo passaggio, e chiede di ripercorrere nuovamente tutto il procedimento (39).

L'estratto riportato è significativo perché mostra come sia fondamentale, nella fase di messa in comune, la *devoluzione*, da parte del docente, del "problema" della validazione delle strategie. Questa devoluzione concerne sia gli allievi che presentano che quelli che ascoltano. Solo se questi assumono una postura attiva, si implicano in conflitti socio-cognitivi, si fanno carico dell'istanza metacognitiva di "controllo" richiamata da Schoenfeld (1985), possono sviluppare le competenze (strategie e processi) necessarie alla risoluzione dei problemi.

Tutte le risoluzioni proposte dai gruppi, anche quelle non riportate in questa analisi, si sono rivelate molto poco argomentate tanto che il docente decide di rimandare la messa in comune a una data successiva, senza svelare un procedimento corretto come gli allievi avrebbero desiderato. A titolo d'esempio si riporta in allegato (v. Figura 8-3 e Tabella 8-1) l'episodio 6 ovvero la presentazione del gruppo Lu-Ca-Pa-Ja.

Per completezza d'informazioni, anche se questo non è oggetto specifico del presente lavoro di ricerca, è importante aggiungere che nei giorni successivi a questa seconda sessione, in una nuova lezione, il docente ha presentato alla classe una propria risoluzione del medesimo problema (v. scheda allegata a p. 52). In tale occasione, sono stati evidenziati alla classe gli elementi presenti che avevano lo scopo di renderla il più possibile chiara e comprensibile e di giustificarne i passaggi: superfici traslate rigidamente dopo averle ritagliate dal disegno di partenza, utilizzo di simboli per un riferimento univoco a ogni superficie, messa in evidenza dei passaggi utilizzando più disegni, calcoli, frecce e commenti. In seguito è stato richiesto agli allievi, come compito a casa, una nuova risoluzione del problema con la richiesta di "in modo da convincere un vostro compagno che ogni passaggio del vostro procedimento è corretto".

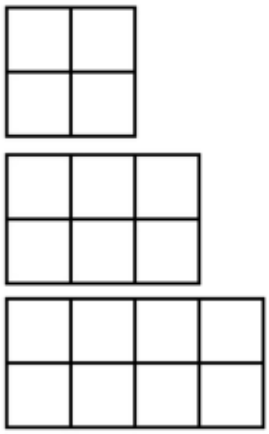
In alcune delle risoluzioni restituite si è potuto notare un maggior sforzo di giustificazione dei passaggi fatti e di documentazione del proprio ragionamento. Ad esempio, due membri del gruppo di cui sopra (v. figura allegata a p. 53) hanno mostrato una maggior consapevolezza e maggior competenza, nel tentativo di illustrare e provare la bontà del loro ragionamento. Dal protocollo in allegato, infatti, si può osservare: l'uso della superficie di partenza ritagliata e non semplicemente ridisegnata a mano libera nonché l'aggiunta di frecce per indicare le superfici che vengono riposizionate e accostate ad altre. Inoltre sono presenti delle linee tracciate con la riga per suddividere la nuova superficie in triangoli equivalenti al fine di giustificare l'uso di una frazione come parte di un intero.

Sessione n. 3 (febbraio)

Il terzo problema proposto alla classe è intitolato "Griglie di fiammiferi" ed è stato scelto tra quelli considerati adatti per la fascia 5ª SE – 2ª SM (v. analisi a priori ARMT allegata a p. 56), per nuovamente favorire maggiori possibilità di riuscita.

In Figura 5-5 è riportato il testo del problema proposto. Il problema coinvolge l'ambito funzioni e successioni numeriche e, come negli altri casi, permette diverse strategie risolutive. Come aiuto è stata messa a disposizione una grande quantità di fiammiferi per poter simulare la situazione.

Griglie di fiammiferi



Per costruire la prima figura ci sono voluti 12 fiammiferi.

Per la seconda è stato necessario usare qualche fiammifero in più!

E per la terza, ancora altri fiammiferi!

Continuando a costruire figure nello stesso modo, quanti fiammiferi saranno necessari per la costruzione della centesima figura?
Giustificate la vostra risposta.

Figura 5-5 – Il testo del problema proposto in classe durante la terza sessione

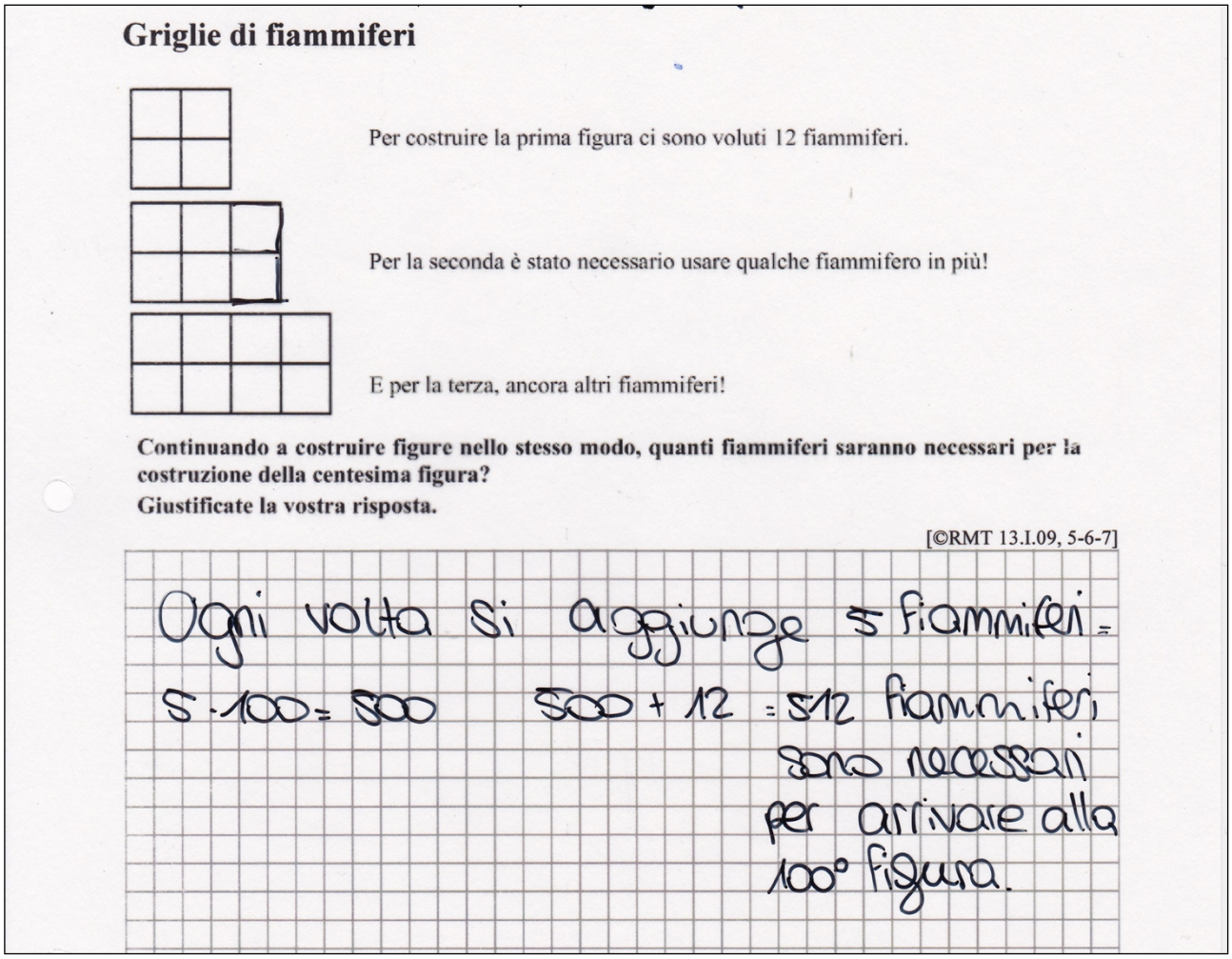
Tabella 5-5 – Struttura della sessione n. 3

Min.	Fase dell'attività	Materiale	Episodio
0 – 12	Spiegazione dell'attività		Episodio 1. Esposizione della consegna e della modalità di lavoro. Distribuzione della scheda di lavoro, lettura e verifica della comprensione
12 – 17	Risoluzione del problema		Episodio 2 Risoluzione a coppie con fiammiferi a disposizione
17 – 39			Episodio 3 Risoluzione a gruppi con lucido e pennarello a disposizione
39 – 41	Presentazione delle risoluzioni		Episodio 4 Presentazione gruppo Si-Se-Lu
41 – 47			Episodio 5 Presentazione gruppo Ja-Os-Car
47 – 52			Episodio 6 Presentazione gruppo Al-Mi-Pa-Ti
52 – 58			Episodio 7 Presentazione gruppo Ca-Ye-Ali-Aj
58 – 62	Conclusione		Episodio 8 Conclusione

A differenza di quanto accaduto nella sessione precedente, memore delle criticità riscontrate, il docente, durante la fase di ricerca, spende alcuni minuti per chiedere a tutti i gruppi di illustrare la strategia che si stava adottando. Ciò gli permette di avere una visione globale delle risoluzioni dei vari gruppi e, allo stesso tempo, di "allenare" ogni gruppo all'esposizione della propria strategia, anticipando domande e difficoltà di argomentazione. Al termine della fase di risoluzione del problema a gruppi, il docente rileva che solo un gruppo ha ottenuto il risultato corretto e perciò, per favorire il verificarsi di conflitti socio-cognitivi, decide di farlo presentare per ultimo.

Analisi dell'episodio 4: la presentazione del gruppo Si-Se-Lu

In Figura 5-6 è riportato il lucido utilizzato per la presentazione dal gruppo Si-Se-Lu mentre in Tabella 5-6 è trascritto l'intero episodio.



Griglie di fiammiferi

Per costruire la prima figura ci sono voluti 12 fiammiferi.

Per la seconda è stato necessario usare qualche fiammifero in più!

E per la terza, ancora altri fiammiferi!

Continuando a costruire figure nello stesso modo, quanti fiammiferi saranno necessari per la costruzione della centesima figura?
Giustificate la vostra risposta.

[©RMT 13.I.09, 5-6-7]

Ogni volta si aggiunge 5 fiammiferi =
5 · 100 = 500 500 + 12 = 512 fiammiferi
sono necessari
per arrivare alla
100° figura.

Figura 5-6 – Presentazione della risoluzione del gruppo Si-Se-Lu

Tabella 5-6 - Episodio 4 (39'12" – 40'38")

1	**In.**	**Allora, ripeto: non spiegate a me, io ho già visto quello che avete fatto, lo spiegate ai compagni. Prego.**
2	Lu.	Ogni volta, a ogni figura si aggiungono 5 fiammiferi: uno, due, tre, quattro, cinque *[conta sul secondo disegno del testo del problema]*. E quindi noi abbiam fatto, visto che dovevamo fare 100 figure, abbiam fatto 5 per 100 che fa 500. Poi, siccome nella prima figura c'erano 12 fiammiferi, abbiam fatto 500 più 12 che fa 512 fiammiferi che quindi sono quelli necessari per arrivare alla centesima figura. Abbiamo finito.
3	**In.**	**Ok. Vi è venuto cinquecen… il risultato finale?**
4	Lu..	512
5	**In.**	**512. Ok. È chiaro come hanno ragionato?**
6	alc.	Sì
7	**In.**	**Va bene. Allora, prendete… Siete d'accordo sul loro tipo di ragionamento?**
8	Ca.	Cioè, più o meno…
9	Aj.	Insomma, noi abbiam fatto diverso…
10	**In.**	**Qualcuno ha fatto un po' diverso**
11	Ca.	Eh esatto
12	**In**	**Allora vediamo dopo il vostro gruppo…**

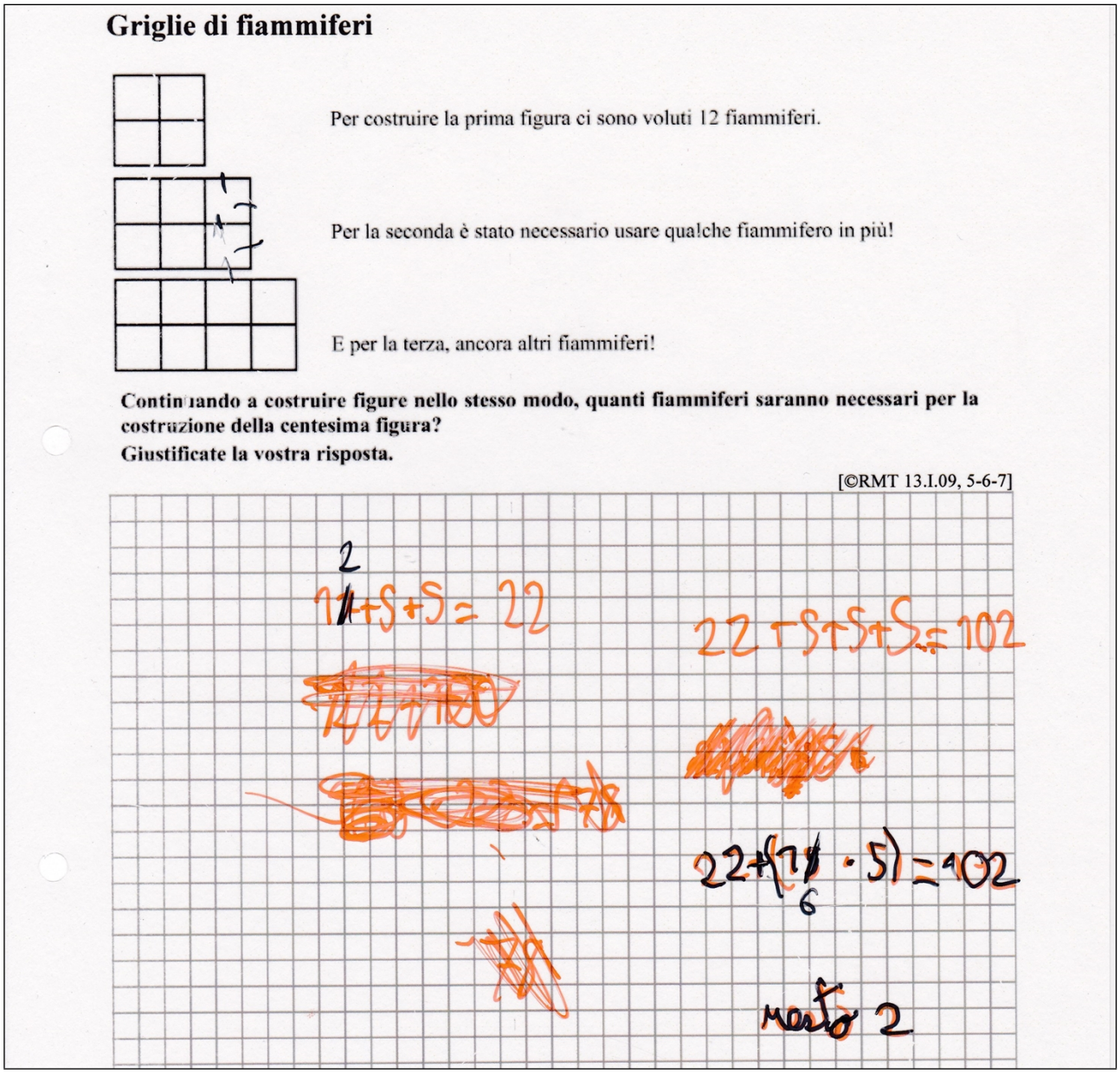
In questo episodio 4, che concerne la prima delle presentazioni delle risoluzioni, si notano interventi degli allievi più lunghi (in particolare il 2) rispetto a quanto osservato nelle prime due sessioni, frutto di una scelta ben precisa di non sostituirsi agli allievi ma di lasciare loro il tempo di assumersi la responsabilità dell'apprendimento.

L'intervento 1 all'inizio dell'episodio – ma anche di tutta la fase di presentazione e discussione delle risoluzioni – è frutto del lavoro di anticipazione delle presentazioni fatto durante la fase di ricerca di risoluzione e vuole esplicitare il ruolo non da protagonista che il docente intende giocare in questa fase. A differenza di quanto si era prodotto fino ad ora, il docente sceglie di non essere lui il destinatario privilegiato dello scambio comunicativo del gruppo che presenta, devolvendo questo ruolo agli altri allievi.

Il risultato ottenuto dal gruppo non è corretto poiché la strategia adottata è inefficace. Tuttavia l'insegnante non corregge "subito": attraverso la domanda sulla "chiarezza del ragionamento" (5) rilancia a tutta la classe la responsabilità della validazione, e (7) insiste nel tentativo di aprire la discussione. Questa azione permette di coinvolgere altri allievi nella discussione. Nei tdp 8 e 9 intervengono i membri dell'unico gruppo che ha individuato una strategia corretta. Poiché nessun altro allievo prende la parola, l'insegnante (10, 12) sceglie di lasciare aperta momentaneamente la questione. Si tratta di una scelta dettata dalla necessità, avvertita dal docente, di aspettare che anche altri siano "pronti" a capire: l'effetto è che il tempo didattico si dilata.

Analisi dell'episodio 5: la presentazione del gruppo Ja-Os-Car

In Figura 5-7 è riportato il lucido utilizzato per la presentazione dal gruppo Ja-Os-Car mentre in Tabella 5-7 e Tabella 5-8 è trascritto l'intero episodio.



Griglie di fiammiferi

Per costruire la prima figura ci sono voluti 12 fiammiferi.

Per la seconda è stato necessario usare qualche fiammifero in più!

E per la terza, ancora altri fiammiferi!

Continuando a costruire figure nello stesso modo, quanti fiammiferi saranno necessari per la costruzione della centesima figura?
Giustificate la vostra risposta.

[©RMT 13.I.09, 5-6-7]

2
7+5+5 = 22

22+5+5+5 = 102

22+(7 · 5) = 102
6

merto 2

Figura 5-7 – Presentazione della risoluzione del gruppo Ja-Os-Car

Tabella 5-7 - Episodio 5 (40'38" – 47'12") – Prima parte

4	Os.	[…] 12, che è questo *[indica il primo disegno del testo del problema]*, 12…
5	**In.**	**… fiammiferi**
6	Os.	… fiammiferi più 5, perché ogni volta qua aggiungi 5: un, due, tre, quattro e cinque *[conta sul secondo disegno del testo del problema]*. Ne aggiungi sempre 5 per fare una colonna in più. Abbiamo fatto per 2 perché abbiamo aggiunto 2 colonne, più 12 fa 22. E questo 22 abbiam fatto più 5 fino ad arrivare a 102. E 102 è il numero… che resta il resto, che è 2. Abbiam fatto sempre 5 fino a arrivare a 102. Abbiam contato quante volte abbiam fatto "più 5", che sono 15, Poi abbiam fatto… ecco qua è più semplice *[indica il calcolo 22 + (15·5) = 102]*: 22 più 15 per 5. 15 per 5 fa…
		[…]
10	Si.	Fa 75
11	Os.	Più 22
12	Aj.	Lì non si vede quello che c'è scritto
13	Os.	Dove?
14	Ti.	Fa 92
15	**In.**	**Prova a ripassare un attimo col nero quello che avete scritto. Così è più chiaro. Cosa dicevi Si.?**
16	Si.	Niente
17	**In.**	**Non ho proprio sentito**
18	Si.	È sbagliato eh?
19	**In.**	**Cosa è sbagliato?**
20	Si.	È impossibile che il risultato di 15 per 5 più 22 faccia 102
21	Ti.	Fa 96… 97
22	**In.**	**Mh… E quindi? Bella questa cosa!**
23	Ti.	Fa 97
24	Os.	Fa 75!
25	Si.	*[mentre Os. va velocemente verso il proprio posto]* Ma non prenderai davvero la calcolatrice!
26	Mi.	*[mentre Os. torna a presentare con la calcolatrice]* Ah no, dopo questa il maestro ti manderà in punizione! *[sorride]*
27	**In.**	**Quindi: riesci a riassumere un attimo il vostro procedimento e alla fine il risultato?**
28	Os.	Abbiamo contato sbagliato. Mi sa che ci vuole 1 o 2 in più al posto di 15, vuol dire 16 o 17, e si arriva a 102. Abbiam, tipo, saltato 2 o 3 volte. Sarebbe il 16.
29	**In.**	**Scusami…**
30	Os.	O il 17?
31	**In.**	**Aspetta, prima c'era una domanda qua, Lu.**
32	Si.	Eh, è il 16… fa 102: 80 più 22
33	Os.	Il 16

In questo nuovo episodio, si conferma il cambio di postura del docente già identificato nell'ambito dell'episodio 4. Il numero degli interventi del docente diminuisce radicalmente (14 su 60 scambi). Anche la funzione di tali interventi si è modificata e serve piuttosto a "regolare" la modalità della presentazione (suggerendo di utilizzare il nero, per rendere più leggibile il lucido, all'intervento 15) o per chiedere agli allievi di riassumere il procedimento (27). Inoltre, a differenza di quanto si poteva osservare nelle prime due sessioni, l'insegnante lascia agli allievi la responsabilità di decidere loro con quale logica presentare il procedimento e la soluzione. Questo comporta anche il rischio di lasciare presentare qualcosa di "errato", come effettivamente accade dal tdp 6 al tdp 49. Il gruppo infatti non solo ha compiuto un errore di calcolo (20-32), ma ha mal interpretato la richiesta

del problema, risolvendone di fatto un altro. In questo passaggio, il docente devolve al resto della classe la responsabilità di accorgersene, valorizzando l'intervento di Lu. che se ne è resa conto (31).

Tabella 5-8 - Episodio 5 (40'38" – 47'12") – Seconda parte

34	Lu.	No, no, io... Ah sì! Però, comunque, se aggiungete ancora 5 fiammiferi non arrivate... 15 volte, più 2 volte... Cioè, comunque avete 17 volte, 17 figure, non ne avete 100
35	Os.	In sé sarebbe o 16 o 17
36	Lu.	Non cambia niente: 17 più 2, 19
37	Os.	Sì che cambia
38	Lu.	Va beh, io non intendo il risultato, io intendo che...
39	Os.	17 per 5 fa 85
40	Lu.	Sì ma io non intendo che...
41	Os.	85 più 22
42	Lu.	Sì ma io non intendo il risultato, comunque devono essere 100 volte le parti che hai 5 fiammiferi. Devono essere 100 figure, ogni volta di 5 fiammiferi
43	Os.	No, dobbiamo arrivare a 100
44	Lu.	No!
45	Os.	Questa qua è la prima figura *[indica il primo disegno del testo del problema]*, questa è la seconda *[indica il secondo disegno del testo del problema]*, questa è la terza *[indica il terzo disegno del testo del problema]*: dobbiamo arrivare fino alla centesima figura
46	Lu.	Appunto. Comunque 100 meno 3, 97
		[...]
49	Os.	Questo è 16 *[sovrascrive con il 16 il 15 precedentemente scritto su lucido]*. Ecco, ora è giusto. Perché 16 per 5 fa 80. 80 più 22 fa 102. 102 abbiam già superato la soglia della centesima volta. Vuol dire che il resto è di 2 però. Però il risultato è 16... perché è 16 volte che...
50	**In.**	**Ah, quindi: 16 fiammiferi ci vogliono...**
51	Lu.	... per fare 100 figure?
52	Ca.	Per farne 100 di figure?
53	Si.	È impossibile!
54	Os.	No.
55	**In.**	**La domanda era "quanti fiammiferi ci vogliono..."**
56	Os.	Ho sbagliato. Dai, abbiamo sbagliato
57	Lu.	La cosa che volevo dire è che tu non dovevi arrivare a 100 fiammiferi, ma a 100 figure
58	**In.**	**Ti sei reso che conto che avete fatto un problema forse un po' diverso da quello che era richiesto**
59	Os.	Sì, abbiamo fatto "quante volte..."

Nei tdp da 34 a 42 continua il fraintendimento tra errore di calcolo ed errore di strategia. Nei tdp 51, 52 e 53 si assiste allo sviluppo di un interessante conflitto socio-cognitivo e alla co-costruzione di una congettura grazie ad una interazione efficace.

Infatti a partire dal tdp 51, gli allievi che espongono (ma anche una parte di coloro che ascoltano), grazie all'interveto del docente che richiama l'attenzione su un nodo cruciale, si rendono conto dell'errore (piuttosto grossolano) in cui erano caduti. Si produce un "pensare assieme" che non corrisponde al pensare di qualcuno mentre la validazione delle strategie è diventata un "problema" e un'istanza anche di diversi altri allievi. Come indicato da Pontecorvo, Ajello e Zucchermaglio (v. p.

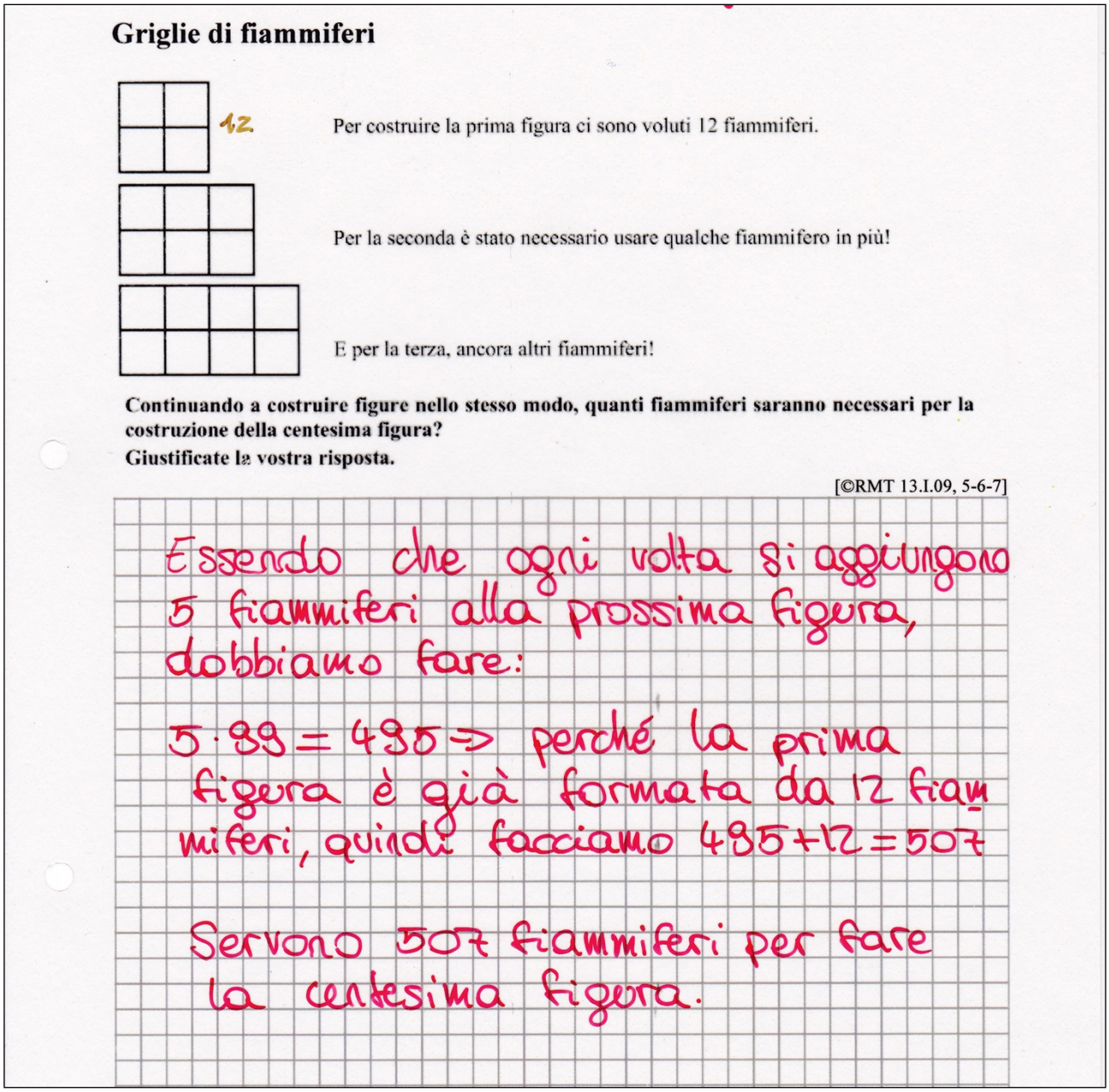
8) le “differenti centrazioni di punti di vista tra i partecipanti” della discussione hanno prodotto “uno squilibrio interindividuale che è alla base di quello intraindividuale”. (1991)

Al tdp 58 il docente avverte il bisogno di ridimensionare “la gravità” dell’errore, trasformandolo “in positivo”, in maniera da recuperare un eventuale senso di possibile “umiliazione” dell’allievo che, in prima persona, sia durante la risoluzione sia durante la presentazione, più si è esposto.

Questo episodio permette di mettere bene in luce l’importanza delle diverse fasi indicate da Polya (1967); da una parte la comprensione del problema (il gruppo non aveva correttamente inteso cosa si dovesse cercare), dall’altra la valutazione della correttezza e della pertinenza della soluzione trovata.

Analisi dell’episodio 7: la presentazione del gruppo Ca-Ye-Ali-Aj

In questo episodio si analizza la presentazione dell’unico gruppo che ha individuato una strategia risolutiva capace di considerare correttamente i vincoli del problema e di portare ad una soluzione corretta. In Figura 5-8 è riportato il lucido utilizzato per la presentazione dal gruppo Ca-Ye-Ali-Al mentre in Tabella 5-9, Tabella 5-10 e Tabella 5-11 è riportato l’intero episodio suddiviso in tre parti per maggiore leggibilità.



Griglie di fiammiferi

12

Per costruire la prima figura ci sono voluti 12 fiammiferi.

Per la seconda è stato necessario usare qualche fiammifero in più!

E per la terza, ancora altri fiammiferi!

Continuando a costruire figure nello stesso modo, quanti fiammiferi saranno necessari per la costruzione della centesima figura?
Giustificate la vostra risposta.

[©RMT 13.I.09, 5-6-7]

Essendo che ogni volta si aggiungono 5 fiammiferi alla prossima figura, dobbiamo fare:

$5 \cdot 99 = 495 \Rightarrow$ perché la prima figura è già formata da 12 fiammiferi, quindi facciamo $495 + 12 = 507$

Servono 507 fiammiferi per fare la centesima figura.

Figura 5-8 – Presentazione della risoluzione del gruppo Ca-Ye-Ali-Aj

Tabella 5-9 - Episodio 7 (52’50” – 61’04”) – Prima parte

1	Aj.	Allora…abbiamo scoperto che, appunto, ogni volta se ne aggiungono 5 di fiammiferi e quindi abbiam fatto 5 per 99 e non per 100 perché… il primo… cioè ci sono già di 12 quadretti *[fiammiferi]*. e nessuno che se ne aggiunge, quindi… Ma come faccio a spiegarlo? […]
		[…]
4	Ca.	Cioè, ci sono già i 12 fiammiferi... *[…]*
5	**In.**	**Siete tutte e 4: chiunque può spiegare**
6	Ca.	Ma, no, nel senso… Cioè… Qui ci sono in tutto 12 fiammiferi no? E se noi abbiamo fatto “per 99” è perché qui c’erano già… Non lo so spiegare meglio!
		[…]
8	**In.**	**Dov’è che sono i 12 fiammiferi?**
9	Aj.	Sono questi qua i 12 fiammiferi *[indica i disegni del testo del problema]*
10	**In.**	**Indicate bene così vedon tutti**
11	Aj.	Il primo, questo *[indica il primo disegno del testo del problema]*. E ogni volta si aggiungono 5: 5 *[indica il secondo disegno del testo del problema], 5 [indica il terzo disegno del testo del problema].* Però si aggiungono 5 solo in 99 figure perché nella prima non si aggiunge niente
12	Lu.	Allora sarebbe 95 non 99
13	Aj.	99 perché sono 100 le figure e in una non abbiamo aggiunto niente
14	Lu.	Ah!
15	Aj.	Poi abbiamo fatto 5 per 99 che ha fatto 495 e poi abbiamo aggiunto i 12 che ha fatto… quanto ha fatto?
16	Ca.	507
17	Aj.	507. E 507 è il risultato
18	**In.**	**Gli altri cosa pensano? Cos’è che non va e cos’è che funziona secondo voi? Lu.**
19	Lu.	Che non si aggiungono è vero, però, è comunque una figura, perciò la bisogna calcolare per fare tutte le 100 figure
20	Ca.	Ma poi li abbiamo aggiunti i 12 fiammiferi, li abbiamo aggiunti
21	Lu.	Ma allora non potevate fare direttamente….
22	Ca.	Abbiamo deciso di aggiungerlo dopo
23	Lu.	E perché esce 495?
24	Ca.	Perché 5 per 99 fa 495
25	Lu.	Ah no, scusate, pensavo che uscisse 490
26	Ca.	No quello è un 5 *[indica il calcolo]*
27	Lu.	Ma comunque sarebbe la stessa cosa fare 5 per 100
28	**In.**	**Cosa avresti fatto tu Lu., non ho capito?**
29	Lu.	Io avrei fatto 5 per 100 + 12
30	**In.**	**5 per 100 più 12. Però il risultato è diverso se fai 5 per 100 più 12**
31	Ca.	Fa 512
32	Lu.	Ma comunque se li aggiungi dopo il risultato dovrebbe essere lo stesso
33	Ca.	Dovresti fare 100 per 5 però meno 5 poi, per fare lo stesso risultato.
34	Lu.	Perché meno 5?
35	Ca.	Perché nella prima figura non si aggiunge niente. Cioè: sono già 12 e non si aggiungo altri 5
36	Lu.	Ah, è vero!
37	**In.**	**Al.**
38	Al.	Io non ho capito perché alla fine si aggiungono 12
39	Aj.	Perché… Lo spieghi te Ca.? Ok, lo spiego io. Allora, perché nella prima figura non si aggiunge niente
40	Al.	Eh sì… ma… cioè… nel primo calcolo voi che fate 5 per 99 perché nella prima figura non si aggiunge niente, e vi esce il risultato, ma …
41	Aj.	Esce il risultato di quelli che si sono aggiunti alla prima figura e quindi fare “più la prima figura” per trovare la figura finale. Non hai capito?
42	Al.	No, allora, aspetta. Voi fate: 5 per 99…
43	Aj.	Ok
44	Al.	… e poi gli aggiungete 12 fiammiferi. Ah!
45	Ca.	Esatto

Nella prima parte dell'episodio, si assiste ad una sorta di "co-esplicitazione" tra i membri del gruppo della strategia risolutiva adottata. L'insegnante interviene per "regolare" (10) e per coinvolgere tutti, in particolare Lu. (18, 28, 30, 37) e Al. (30, 40, 42 e 44) che ascoltano. Sembra che i diversi allievi abbiano ben chiaro solo una parte del procedimento risolutivo e che, invece, costretti dalla situazione, debbano (ri)costruire la logica che sottende tutti i passaggi. Il ruolo dell'insegnante, molto più "discreto" (7 interventi su 45), resta quello comunque di evidenziare eventuali incongruenze (30) per alimentare il confronto e il dibattito.

L'episodio sopra riportato, continua nella Tabella 5-10 seguente.

Tabella 5-10 - Episodio 7 (52'50" – 61'04") – Seconda parte

46	**In.**	**Quindi voi avete detto: la prima ne ha già 12 per fare tutte le altre**
47	Aj.	Abbiamo calcolato quelli che si aggiungono e poi più 12, quel 12 *[indica la prima figura del testo del problema]*
48	**In.**	**Os. cosa pensi?**
49	Os.	È un po' strano
50	**In.**	**Cos'è che non ti convince?**
51	Aj.	E perché è strano?
52	Mi.	*[sottovoce]* È strano perché non ho capito
53	**In.**	**Mi. è chiaro?**
54	Mi.	Sì
55	**In.**	**Cos'hai detto prima?**
56	Mi.	Non ho capito
57	**In.**	**Chiedi allora: sono lì apposta! Cos'è che non hai capito?**
58	Ca.	Tu non hai capito quello che abbiam fatto?
59	Mi.	No
60	Aj.	Niente proprio? Zero?
61	Mi.	No
62	**In.**	**Chiedo una cosa io: non hai capito come hanno fatto o non sei d'accordo su quello che hanno fatto?**
63	Mi.	Non ho capito
64	**In.**	**Vuole provare una di loro che non ha ancora parlato? Magari trova un modo diverso di dirlo**
65	Ca.	Io mi sono accorta che ho spiegato male all'inizio…
66	Aj.	Io non so come spiegare meglio
67	**In.**	**Qualcuno ha capito di quelli che hanno ascoltato? *[Al e Lu. alzano la mano]* Vuoi provare tu a spiegarlo?**
68	Al.	Allora, praticamente loro hanno fatto 99 perché nella prima figura che c'è la sopra *[indica la figura dal posto]* non si aggiunge, quindi…
69	**In.**	***[mentre si avvicina alla lavagna luminosa]* Questa è la prima figura *[indica la prima figura del testo del problema]*, questa, ed è già fatta**
70	Al.	… e quindi sarebbero "per 5" perché si aggiungono sempre 5 che fa 495. E da lì hanno aggiunto i 12 della prima figura perché per la prima figura ci servono 12 fiammiferi e quindi hanno fatto "più 12" che fa 507
71	Mi.	*[con la testa fa un cenno di assenso]*

La seconda parte dell'episodio è generata da un intervento cruciale (48) del docente, che dopo aver rispecchiato (46) la conclusione a cui è giunto Aj. un membro del gruppo, apre ad altri il dibattito.

Tutto l'estratto è caratterizzato dalla volontà del docente di attivare gli altri allievi nella discussione critica del procedimento e nella sua validazione. Nei tdp 48, 50, 53, 57, 62, 67 il docente rilancia alla classe a più riprese la responsabilità di rispondere alla domanda di Mi. Ciò riapre la discussione tra pari, suscitando il conflitto socio-cognitivo.

Tabella 5-11 - Episodio 7 (52'50" – 61'04") – Terza parte

72	**In**	**Os.?**
73	Os.	Però bisognava partire dalla terza figura, non dalla prima. Avete saltato due passaggi
74	Aj.	Da nessuna parte c'è scritto che bisognava partire dalla terza, si poteva partire anche dalla prima
75	Os.	Allora potevi partire anche dall'ultima!
76	**In.**	**Anche dalla terza potevi partire**
77	Aj.	Eh, esatto
78	**In.**	**Come si poteva fare se si voleva partire dalla terza? Lu. come avresti fatto tu a partire dalla terza?**
79	Lu.	5 per 97 più…
80	**In.**	**5 per 97…**
81	Lu.	… più quelli che dopo…
82	**In.**	**Più 12?**
83	Lu.	No, no! Più 12, più… Faccio già il totale…
84	Ca.	No perché "più 12" è quello della prima figura
85	Aj.	Più 17
86	**In.**	**17 sono questi *[indica la seconda figura del testo del problema]*, questi son 22 *[indica la terza figura del testo del problema]*.**
87	Lu.	No, più 17 più 12
88	Alc.	Ah sì
89	**In.**	**Col pennarello *[scrive sul lucido accanto alle figure del testo del problema]*. Questi sono 12. Ah! Ma questo è il vostro! *[lucido di presentazione]***
90	Aj.	Ma non fa niente!
91	**In.**	**Comunque 12 *[indica la prima figura del testo del problema]*, 17 *[indica la seconda figura del testo del problema]* e 22 *[indica la terza figura del testo del problema]* per chi li aveva contati**
92	Lu.	No, per me… 29. Dopo il risultato che esce: più 29
93	**In.**	**Non più 22?**
94	Lu	No. Perché 12 più 17 fa 29… Ah no! È vero, è vero, ho capito!
95	**In.**	**Per gli altri è chiaro?**
96	Lu.	Perché dopo devo contare solo la figura…
97	**In.**	**…da cui sei partita. Quindi: 22 più quei 97 per 5. Ok. Ci sono altre domande?**
98		***[silenzio]***
99	**In.**	***[rivolto al gruppo che sta facendo la presentazione]* E avete ottenuto 507. Ok. Grazie allora**

Questa terza parte della discussione è introdotta dalla richiesta di chiarimento di Os. (73), coinvolto direttamente dal docente che lo vede perplesso (72). La presenza di quest'ultimo in quest'occasione è più importante. Rispecchia le affermazioni degli allievi che possono condurre a giustificare pienamente il procedimento svolto (76, 80, 86), fa uso di alcune domande chiuse (82, 93) che consentono di mettere in evidenza contraddizioni o errori di calcolo e completa la frase dello studente istituzionalizzando il risultato (97). La postura è cambiata rispetto alle parti precedenti. L'istanza di istituzionalizzazione prevale su quella della devoluzione e l'intento è quello di andare

verso la conclusione della lezione. Infatti, dopo il conflitto socio-cognitivo generato, il docente ha ora maturato una ragionevole certezza che la maggioranza della classe ora è pronta a comprendere il ragionamento e ad approdare definitivamente alla soluzione del problema.

6. Conclusioni

Le analisi presentate finora permettono di trarre alcune conclusioni circa le domande di ricerca formulate nel capitolo 3 e che, per comodità del lettore vengono riportate anche nel presente capitolo.

1. In che modo la modalità di conduzione della messa in comune da parte dell'insegnante influisce sull'attivazione dei processi cognitivi e metacognitivi fondamentali nell'attività di problem solving degli allievi?

Durante l'analisi della prima sessione si è osservato come, in presenza di interventi frequenti del docente, si ottiene una esposizione piuttosto chiara del processo risolutivo. Tuttavia, nonostante un utilizzo delle tecniche rogersiane dell'ascolto attivo, ovvero rispecchiamenti e riformulazioni di quanto espresso dall'allievo e domande aperte, quello che ne emerge è una ricostruzione del processo che non necessariamente riflette il pensiero dell'allievo nella sua globalità, ma, piuttosto quello dell'insegnante. Se, grazie al rispecchiamento accompagnate da domande aperte mirate (v. p. 12), si accompagna l'allievo nell'esplicitare e approfondire singoli passaggi della sua strategia risolutiva e del suo ragionamento, la responsabilità ultima di tale ricostruzione e presentazione resta nelle mani del docente. Conseguentemente, si riduce la possibilità che l'allievo autonomamente attivi e sviluppi quei processi cognitivi e metacognitivi (rispettivamente di verifica critica della soluzione e di "controllo") attesi tanto negli allievi che presentano quanto in quelli che osservano.

Ciò che favorisce la produzione di conflitti socio-cognitivi è invece il cambio di postura del docente che, dichiarando il proprio esser fuori dalla discussione, decide di limitare fortemente i suoi interventi e, coerentemente, si ritira in una posizione mimetica. Questo, come si è osservato nella terza sessione, conduce a una maggiore presa di responsabilità da parte degli allievi della comprensione delle strategie risolutive adottate (proprie e altrui) e della loro validazione. Resta valida la messa in guardia di Pontecorvo, Ajello & Zucchermaglio (1991) circa un uso depotenziato della discussione e in effetti, anche nella sessione 3, si è visto come gli interventi del docente per ricentrare lo scopo della discussione, o per dare la parola a chi ha osservazioni più funzionali alla discussione si siano verificati necessari.

2. Quali interventi del docente durante la messa in comune di strategie risolutive diverse favoriscono o, al contrario, inibiscono, il coinvolgimento attivo e la responsabilizzazione degli allievi?

Dalle sessioni di *problem solving* presentate e analizzate, in particolare dalla terza, si può concludere che il verificarsi di conflitti socio-cognitivi durante la messa in comune è favorito da un atteggiamento del docente più da "direttore d'orchestra" che da "solista". Questo atteggiamento si manifesta soprattutto nella regolazione dei tempi della discussione. Ripercorrendo gli elementi scaturiti dalle analisi precedenti, gli interventi da ritenere come efficaci hanno come caratteristica un "non fare".

- non suggerire le risposte ma lasciare manifestarsi l'errore (v. Tabella 8-1)
- non correggere direttamente gli errori ma problematizzare i passaggi non chiari o non corretti e suscitare, negli allievi, la necessità di validarli/invalidarli (v. Tabella 5-7)
- non commentare ogni intervento degli allievi ma attendere i commenti dalla classe (v. Tabella 5-9)
- non rispondere alle domande ma rilanciarle alla classe (v. Tabella 5-10)

Inoltre, quando l'insegnante interviene è utile che lo faccia mantenendo una modalità di comunicazione che favorisca la presa di parola degli allievi, soprattutto attraverso il rispecchiamento e il rilancio ad altri (v. Tabella 5-4).

Infine, per ottenere una messa in comune efficace, è importante sottolineare che il docente, in quanto direttore d'orchestra, deve conoscere la partitura ovvero ciò che gli allievi andranno a condividere. Bartolini Bussi, Boni & Ferri (1995), sostengono addirittura che la discussione di bilancio deve essere "introdotta dall'insegnante alcuni giorni dopo la soluzione individuale del problema" poiché, questo "consente all'insegnante un'adeguata pianificazione della discussione e favorisce negli allievi il distanziamento dal proprio prodotto". (p. 11) Pur avendo tenuto presente questa asserzione, in fase di progettazione, ne ho sottostimato la portata, con le conseguenze riportate a proposito della sessione 2 (v. Tabella 5-4 e Tabella 8-1). Solo nella terza sessione, ho parzialmente tenuto conto di questo aspetto, chiedendo una breve presentazione della propria strategia ad ogni gruppo e poi scegliendo di far presentare per ultimo, l'unico gruppo che aveva trovato la soluzione.

Inoltre, durante lo svolgimento di questa sperimentazione, si è osservato che la comunicazione e l'argomentazione della propria strategia non solo è un problema che gli allievi sentono molto poco, e che va provocata e stimolata, ma le osservazioni mettono in evidenza che gli allievi non sembrano

nemmeno avere gli strumenti operativi per poter comunicare e soprattutto argomentare. Ciò è stato particolarmente evidente quando al termine della seconda sessione di *problem solving* gli allievi sono riusciti a produrre delle presentazioni della propria strategia solo dopo esser stati posti di fronte a un mio esempio di risoluzione. Ritengo che, come docente, occorra prevedere un lavoro specifico al riguardo. Ad esempio, prima di presentare si potrebbe consacrare del tempo alla preparazione della presentazione, eventualmente anche in due momenti separati. In tale occasione si potrebbe chiederebbe agli allievi di verificare gli argomenti a sostegno della validità delle loro congetture (validazione) e arricchire e precisare, con commenti o schemi il loro ragionamento.

Infine, al termine di questo studio, a livello personale ritengo di aver ricavato una maggiore consapevolezza riguardo la mia azione di insegnante, in modo particolare nel contesto di problem solving. Tale presa di coscienza si è sviluppata grazie all'approfondimento della letteratura di riferimento qui documentata e all'esperienza d'insegnamento realizzata, di cui in questa sede ho riportato le riflessioni principali. Aver potuto sperimentare, in aula, nuove e non spontanee modalità di conduzione della messa in comune ha generato una crescita professionale che intendo conservare e sviluppare ulteriormente nei prossimi anni di insegnamento.

7. Bibliografia

Allard, J. (1995). Resolution de problèmes, une valse a trois temps. *Math-Ecole,170*, 11-15.

Disponibile in:

http://www.ssrdm.ch/mathecole/wa_files/Mathecole_170.pdf (13 maggio 2017)

Bartolini Bussi, M.G., Boni, M. & Ferri, F. (1995). *Interazione sociale e conoscenza a scuola: la discussione matematica*, Comune di Modena

Disponibile in:

http://istruzione.comune.modena.it/memo/allegati/interazione_sociale_e_conoscenza_a_scuola.pdf (13 maggio 2017)

Bocchi, P. C. (2015). *Gestes d'enseignement.* Berna, Peter Lang.

Brousseau, G. (1998). *Didattiche disciplinari: Aspetti teorici e metodologici.* Bologna, Pitagora Editrice.

D'Amore, B. (1993). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività del problem solving.* Milano, Franco Angeli.

Dipartimento Educazione, Cultura e Sport (DECS). (2015). Piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese.
Disponibile in:
http://www.pianodistudio.ch/ (13 maggio 2017)

Duncker, K. (1935). *Psychologie des produktiven Denkens.* Berlino: Springer. (tr.it. *Psicologia del pensiero produttivo*, Firenze: Giunti, 1969).

Lumbelli, L. (1972). *Comunicazione non autoritaria* Milano, Franco Angeli,

Margolinas, C. (1993). *De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques*. Grenoble, La pensée sauvage.

Martini, B. (2001). *Didattiche disciplinari. Aspetti teorici e metodologici.* Bologna, Pitagora Editrice.

Monnier, N. (2003). Les schémas dans les activités de résolution de problèmes, *Grand N*, 71, 25-47. Grenoble, IREM.

Disponibile in:

http://www-irem.ujf-grenoble.fr/revues/revue_n/fic/71/71n3.pdf (13 maggio 2017)

Polya, G. (1971). *La scoperta matematica. Capire, imparare e insegnare a risolvere i problemi.* Vol. 1. Milano, Feltrinelli.

Polya, G. (1967). *Come risolvere i problemi di matematica, logica ed euristica nel metodo matematico*. Milano, Feltrinelli.

Pontecorvo, C., Ajello, A.M., Zucchermaglio, C (1991). *Discutendo si impara*. Roma, La Nuova Italia Scientifica.

Popper, K. R. (1972). *Objective Knowledge an Evolutionary Approach*. Oxford: Clarendon Press. [tr. it. *Conoscenza oggettiva. Un punto di vista evoluzionistico*. Roma, Armando, 2002].

Rogers, C. (1973). *Libertà dell'apprendimento.* Firenze, Giunti Barbera.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving*. New York, Academic Press.

Sensevy, G. (2001). Théories de l'action et action du professeur. *Théories de l'action et éducation* (p. 203-224). Bruxelles, De Boeck.

Disponibile in:

http://www.unige.ch/fapse/publications-ssed/files/1714/1572/5507/Pages_de_203_THACED_INT_Baudouin.pdf (13 maggio 2017)

Sensevy, G., Mercier, A., & Schubauer-Leoni, M.-L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur à propos de la Course à 20. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *20*(3), 263-304.

Disponibile in:

https://www.unige.ch/fapse/gredic/files/3314/1924/5082/Sensevy_2000_Modele_action_didactique_professeur_course_a_20.pdf (13 maggio 2017)

Zan, R. (1995). L'approccio meta cognitivo. *Le scienze e il loro insegnamento, nn. 4-5.* Firenze, Le Monnier.

Zan, R., Di Martino, P. (2017). *Insegnare e apprendere matematica con le indicazioni nazionali.* Firenze: Giunti Scuola.

Zan, R. (2007). *Difficoltà in matematica. Osservare, interpretare, intervenire.* Milano, Springer.

8. Allegati

22° RMT **Prova II** marzo-aprile 2014 ©ARMT2014

9. LE CASTAGNE DI CARLO (II) (Cat. 5, 6, 7) ©ARMT 2014 - 22° - II prova

Carlo ha raccolto 81 chili di castagne. Comincia a metterle in tre cesti, uno piccolo, uno medio e uno grande.
Le castagne che mette nel cesto medio pesano il doppio di quelle che mette nel cesto piccolo.
Le castagne che mette nel cesto grande pesano il doppio di quelle che mette nel cesto medio.
Dopo aver riempito i tre cesti, gli restano alcuni chili di castagne, che sono esattamente la metà di quelli contenuti nel cesto grande.

Quanti chili di castagne mette Carlo in ogni cesto?

Quanti chili gli restano?

Spiegate come avete trovato le vostre risposte.

ANALISI A PRIORI

Compito matematico

Ripartire il numero 81 in quattro numeri proporzionalmente a 1, 2, 4 e 2.

Analisi del compito

- Comprendere che le relazioni "doppio" e " metà" sono inverse e che "il peso del contenuto del cesto grande è il doppio di quello del cesto medio" significa anche che "il peso del contenuto del cesto medio è la metà di quello del grande" e che, di conseguenza, il peso del resto è lo stesso di quello del contenuto del cesto medio.
- Passare alla ricerca di quattro numeri: uno "piccolo", due "medi", che sono il doppio del "piccolo", e uno "grande" che è il doppio di ciascuno dei "medi" (o la loro somma) la cui somma è 81.

Oppure:

Comprendere che il totale dei chili di castagne, 81, è stato suddiviso in nove parti (n + 2 n + 2 n + 4 n = 9n), ognuna delle quali è pari alla quantità del cesto piccolo. Calcolare così i chilogrammi: 81 : 9 = 9 (cesto piccolo) e quindi 9 x 2 = 18 (cesto medio oppure resto), infine 9 x 4 = 36 (cesto grande).

Soluzione

Risposte corrette (cesto piccolo: 9 kg, cesto medio: 18 kg, cesto grande: 36 kg e restano 18 kg) con spiegazioni complete e chiare

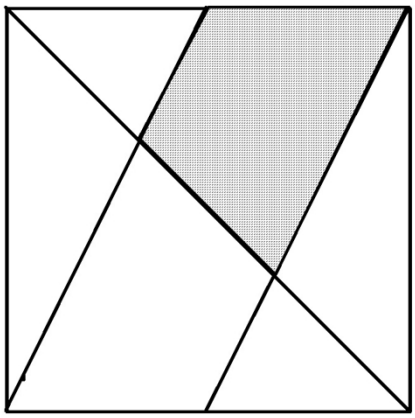
Livello: 5, 6, 7

Origine: Belluno

Figura 8-1 – L'analisi del problema "Le castagne di Carlo" fornita dall'ARMT

6° RALLY MATEMATICO TRANSALPINO - PROVA I gennaio 1998 ©ARMT

12• FRAZIONE DI UN TERRENO



Giuseppe possiede un appezzamento di terreno a forma di quadrato e, poiché è un po' giocherellone, lo divide con rette passanti per i vertici o per i punti medi (cioè i punti di mezzo) dei lati del quadrato.

Francesco riceverà in eredità la parte ombreggiata del terreno di suo padre Giuseppe.

Quale frazione del terreno riceverà Francesco?

Giustificate la vostra risposta.

Campo concettuale:
- Geometria: figure equivalenti, rette parallele, punti medi
- Aritmetica: frazioni

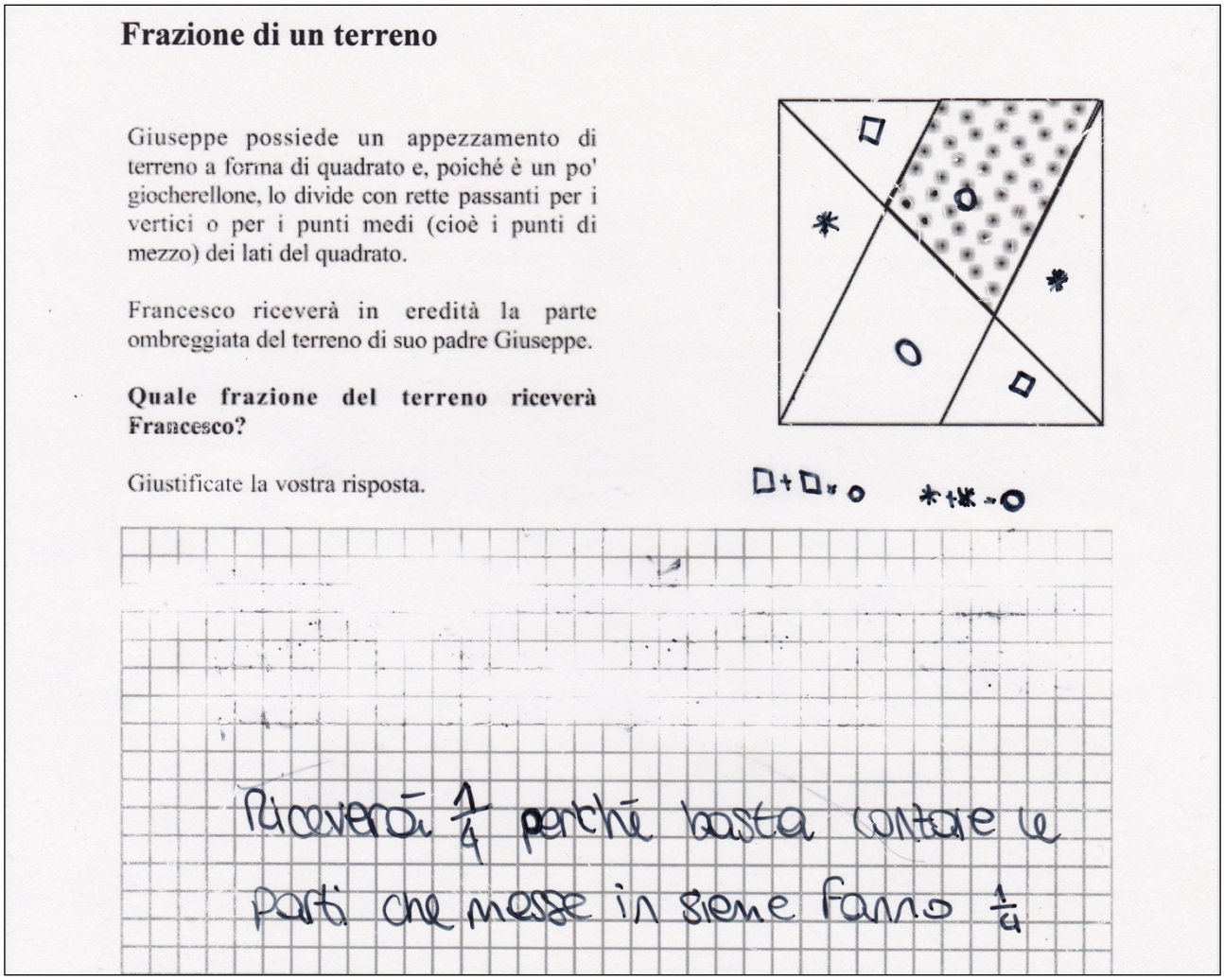
Analisi del compito:
- Ricomporre le sei parti in un parallelogramma e in due triangoli rettangoli isometrici
- Trovare che l'area di ognuno di questi triangoli è la metà di quella del quadrato
- Dedurre che l'area del parallelogramma è metà dell'area del quadrato
- Trovare quindi che la parte ombreggiata, essendo metà del parallelogramma, vale un quarto dell'area del quadrato

Livello : 6 - 7 - 8

Origine : Bourg en Bresse

FINE CAT. 6

Figura 8-2 – L'analisi del problema "Frazione di un terreno" fornita dall'ARMT



Frazione di un terreno

Giuseppe possiede un appezzamento di terreno a forma di quadrato e, poiché è un po' giocherellone, lo divide con rette passanti per i vertici o per i punti medi (cioè i punti di mezzo) dei lati del quadrato.

Francesco riceverà in eredità la parte ombreggiata del terreno di suo padre Giuseppe.

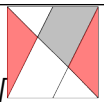
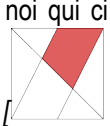
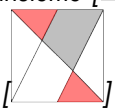
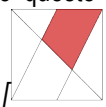
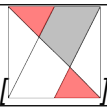
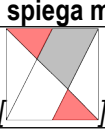
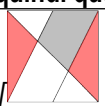
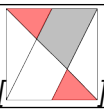
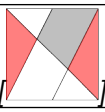
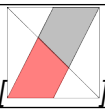
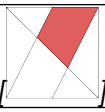
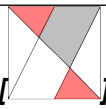
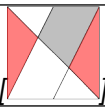
Quale frazione del terreno riceverà Francesco?

Giustificate la vostra risposta.

Riceverò $\frac{1}{4}$ perchè basta contare le parti che messe in sieme fanno $\frac{1}{4}$

Figura 8-3 – Presentazione della risoluzione del gruppo Lu-Ca-Pa-Ja

Tabella 8-1 – Episodio 6 (37’22” – 40’33”)

1	Ca.	Ok. Allora noi… noi qui ci siamo accorti, anche come loro, che queste due parti insieme [] formano queste [ o] e anche queste due parti messe insieme [] formano queste [ o]. E poi..
2	**In.**	**Aspetta, aspetta: spiega meglio. Cioè, quindi quel quadrettino? Messo insieme?** []
3	Ca.	Eh sì. Questi due [] e questi due []
4	**In.**	**E cos’è che fanno insieme?**
5	Lu.	Fanno…
6	Ca.	Eh… questo. [ ] E poi… Che cos’è? *[si rivolge al compagno]* … Francesco qui riceverà un quarto perché basta contare le parti che messe insieme formano un quarto… cioè fanno un quarto
7	**In**	**Ok. Allora: vedo che voi avete trovato una soluzione ma si capisce poco come ci siete arrivati. Cioè avete trovato un quarto ma che cos’è che avete contato? Io non le vedo le parti da contare.**
8	Ca.	Eh sono una [], due [], tre [] e quattro []
9	**In.**	**Ma dovrebbero essere uguali!** **Abbassa un po’, metti un po’ più in basso… *[riferito al lucido]***
10	**In.**	**Ok. Quindi. Io non ho capito. I due quadrati, i due quadrettini [] messi insieme fanno una parte…**
11	Lu.	Qui sono uguali. Non riesco a spiegarlo…
12	Ca.	Questi due messi insieme [ ] fanno questa figura qua. []
13	Ti.	E come fate a saperlo?
14	**In.**	**Mh, bella domanda.**
15	Ti.	Com’è che avete fatto a vederlo?
16	Ca.	Eh, col foglio che ci ha dato il maestro
17	Ti.	Che quelle parti formano la parte: come avete fatto a saperlo?
18	Ca.	Cosa?
19	**In.**	**Che messe insieme fanno… come avete detto?**
20	Lu.	Abbiamo… Eh… non è facile da spiegare…
21	**In.**	**Non è facile spiegare. Sì è vero**
22	Ca.	Eh li abbiamo messi insieme. Abbiamo provato a…
23	**In.**	**Qui avete tagliato, disegnato, cosa avete fatto?**
24	Ca.	Abbiamo disegnato
25	**In.**	**Disegnato**
26	Ti.	Eh ma disegnando non verrebbe così preciso
27	Ca.	Beh…
28	**In.**	**Allora Ti. resta con dei dubbi. Però teniamola qua. Avete trovato quindi ¼ voi Ok. Dai, grazie.**

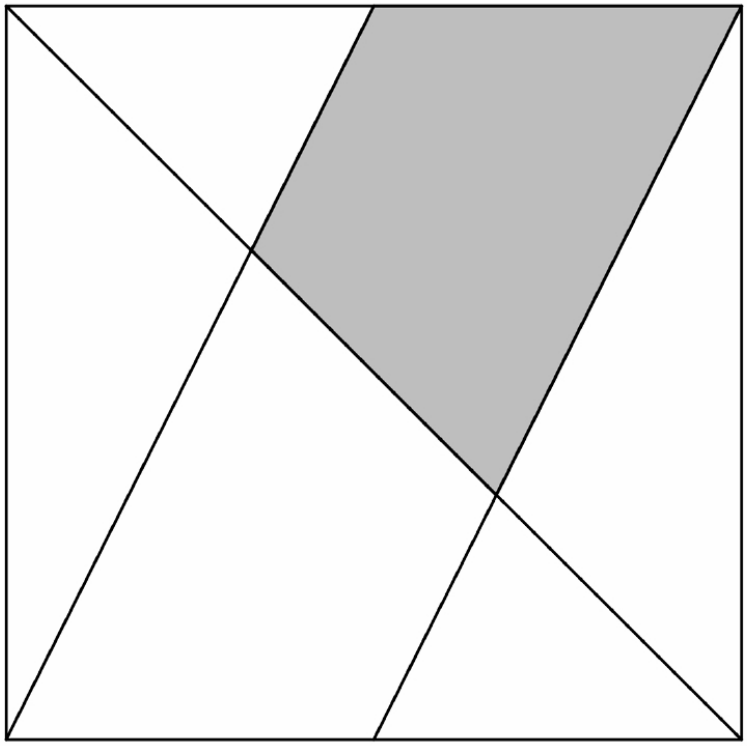


Figura 8-4 – Primo aiuto: il disegno del terreno in grande

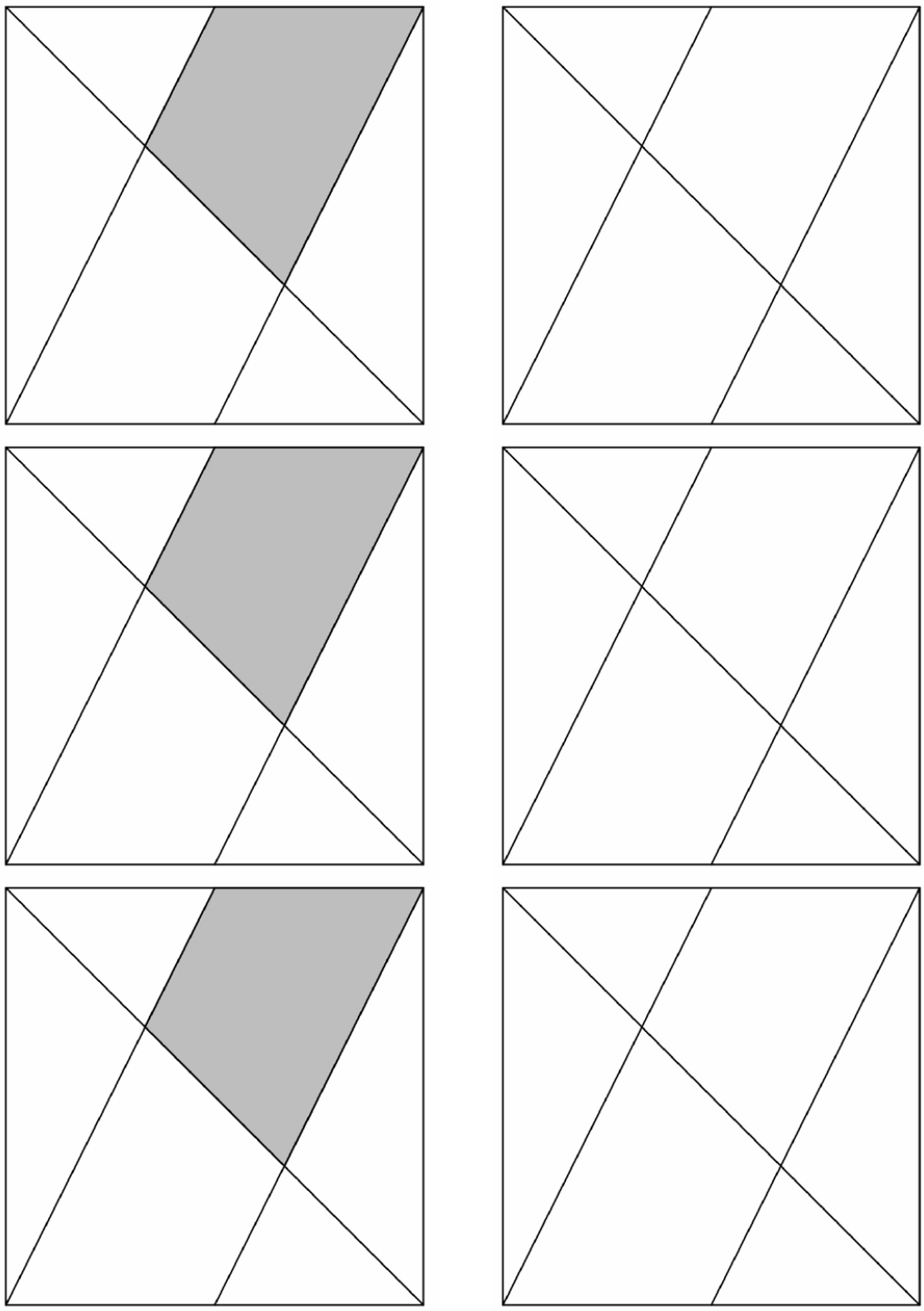


Figura 8-5 – Secondo aiuto: tre disegni del terreno in piccolo con area evidenziata in grigio e tre con solo ripartizioni.

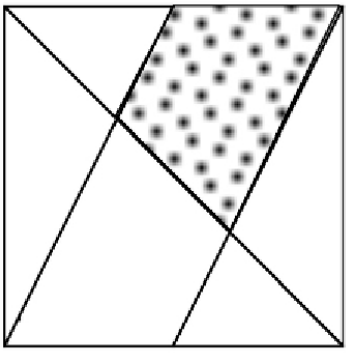
Frazione di un terreno

Giuseppe possiede un appezzamento di terreno a forma di quadrato e, poiché è un po' giocherellone, lo divide con rette passanti per i vertici o per i punti medi (cioè i punti di mezzo) dei lati del quadrato.

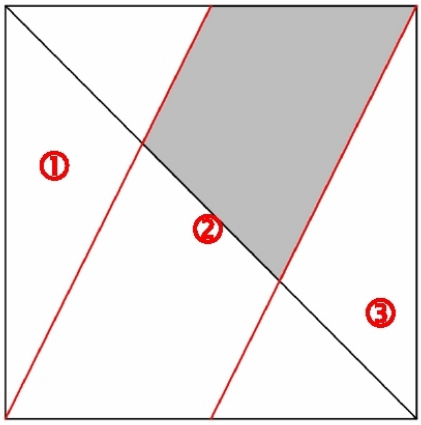
Francesco riceverà in eredità la parte ombreggiata del terreno di suo padre Giuseppe.

Quale frazione del terreno riceverà Francesco?

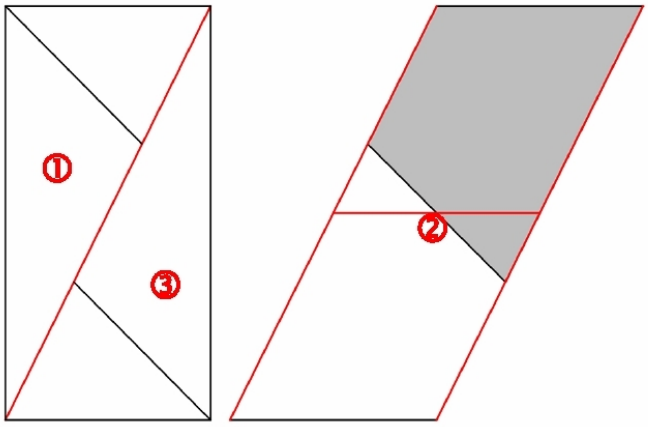
Giustificate la vostra risposta.



Una possibile soluzione



Si divide il quadrato (appezzamento di terreno) in 3 parti seguendo le linee rosse.
Il lato del quadrato misura *l*.



Accostando le superfici 1 e 3 si osserva che insieme occupano un'area pari alla metà del quadrato originale poiché formano un rettangolo che ha base *l*/2 e altezza *l*.
Il parallelogramma che rimane ha la stessa base e la stessa altezza e perciò ha anch'esso un'area pari ½ dell'area del quadrato originale. In esso, la parte in grigio, per come è stata costruita la figura, occupa a sua volta la metà dell'area e perciò ¼ di quella del quadrato originale.

Francesco riceverà ¼ del terreno.

Figura 8-6 – Esempio di risoluzione

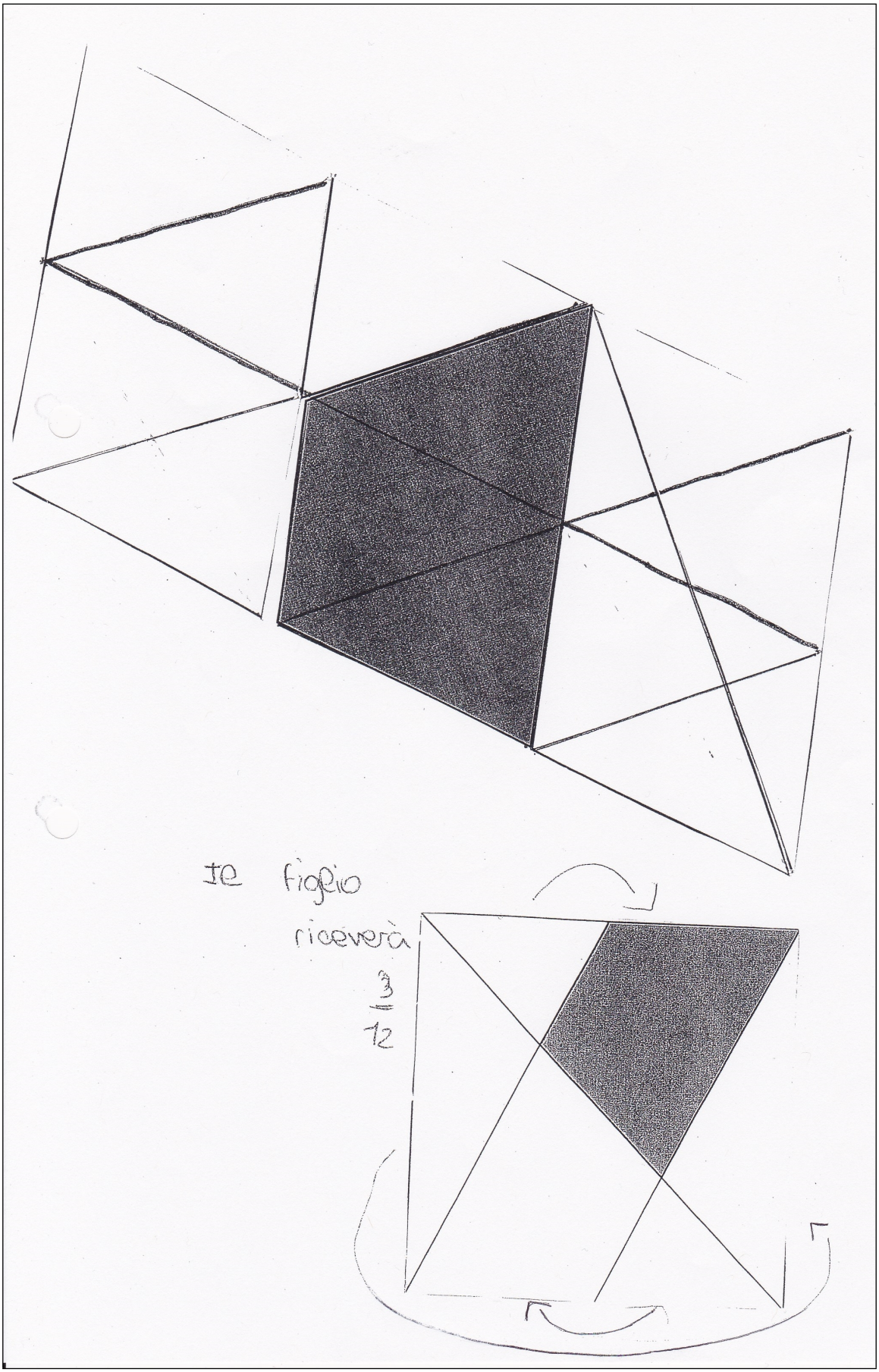


Figura 8-7 – Presentazione della risoluzione svolta a casa da Ali-Aj

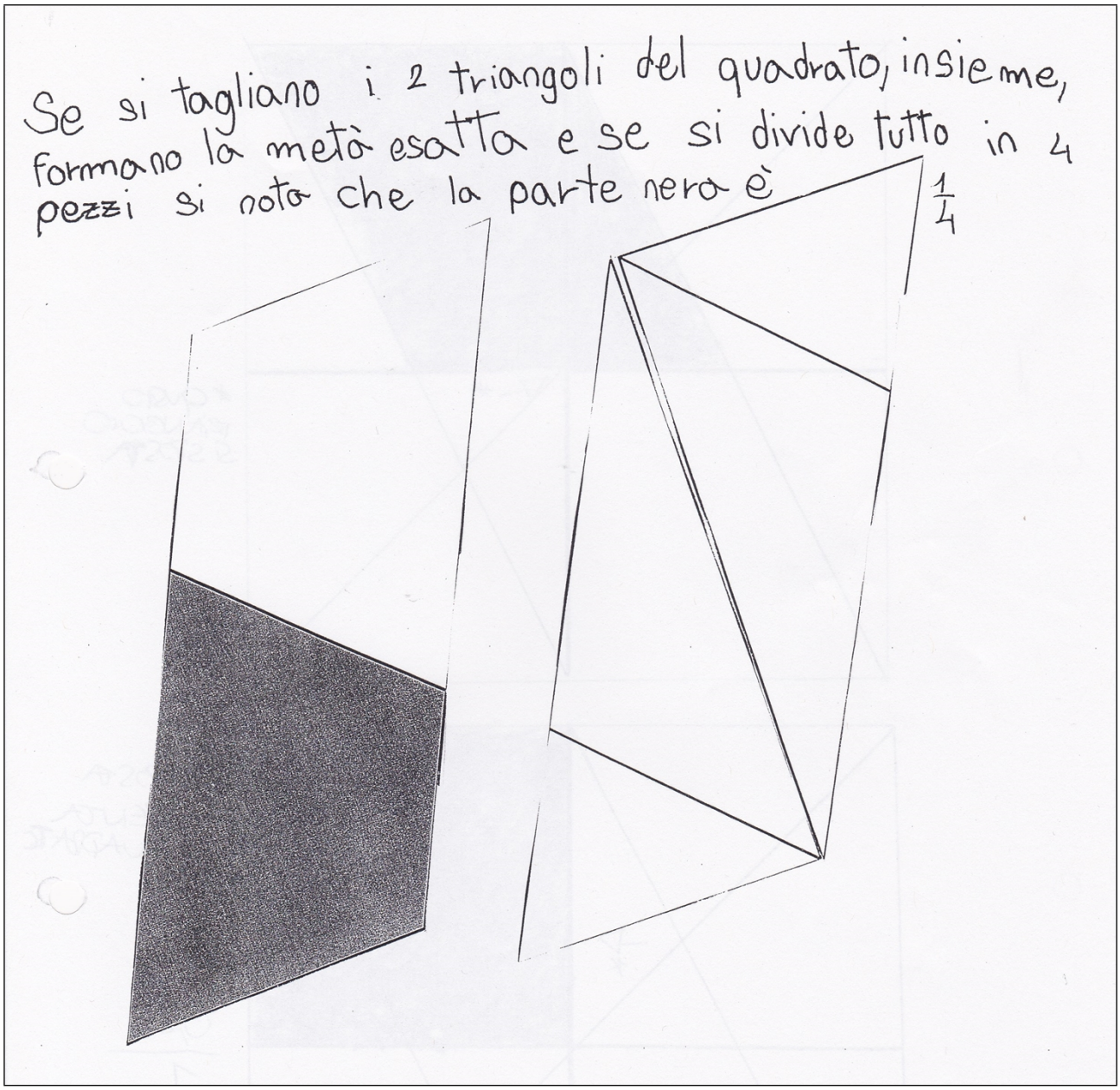


Figura 8-8 – Presentazione della risoluzione svolta a casa da Cr

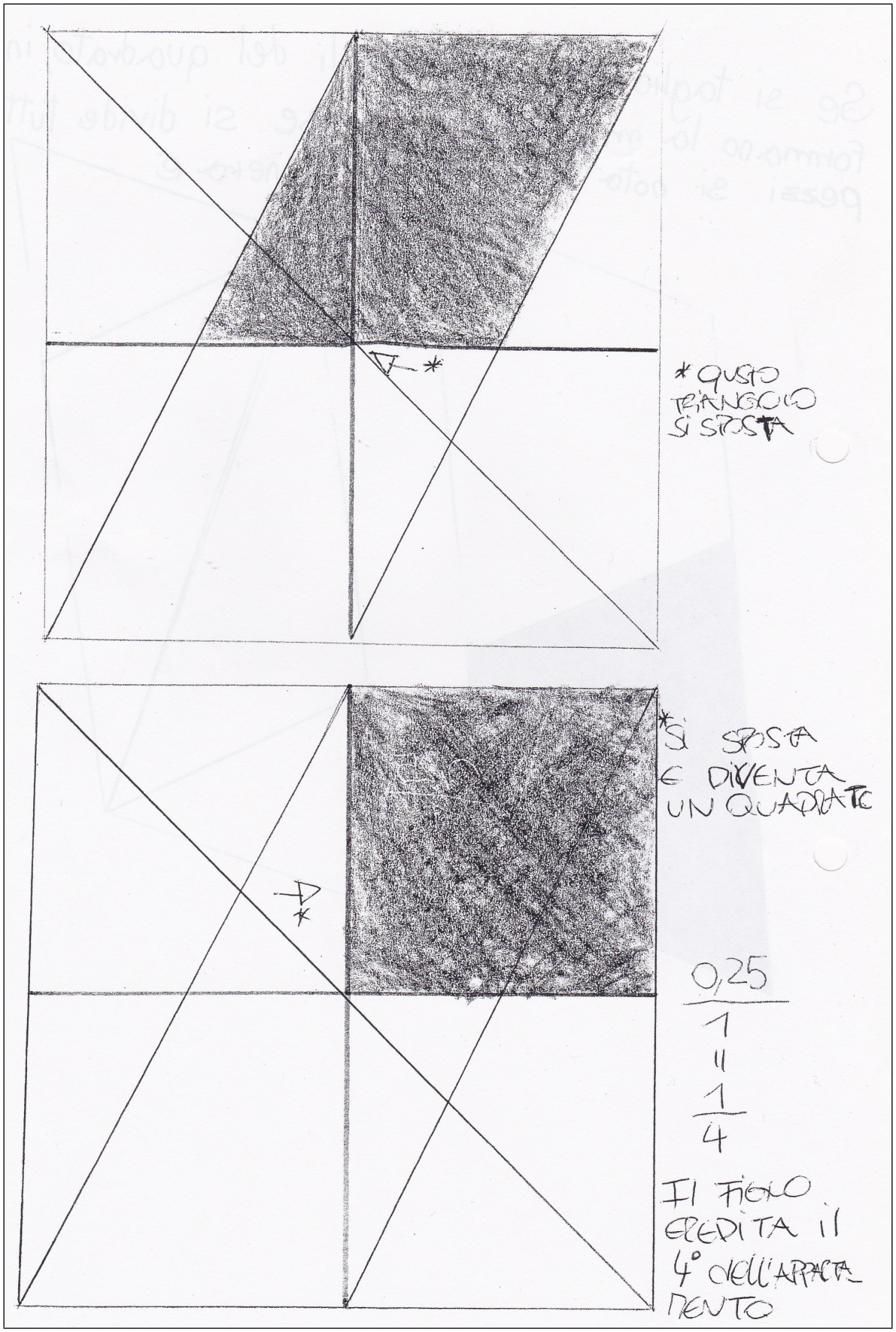
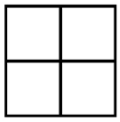


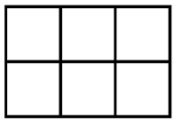
Figura 8-9 – Presentazione della risoluzione svolta a casa da Os-Ye

13° RALLY MATEMATICO TRANSALPINO – PROVA 1 gennaio-febbraio 2005 ©ARMT.2005 p. 10

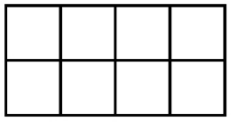
9. GRIGLIE DI FIAMMIFERI (Cat. 5, 6, 7)



Per costruire la prima figura ci sono voluti 12 fiammiferi.



Per la seconda è stato necessario usare qualche fiammifero in più!



E per la terza, ancora altri fiammiferi!

Continuando a costruire figure nello stesso modo, quanti fiammiferi saranno necessari per la costruzione della centesima figura?
Giustificate la vostra risposta.

ANALISI A PRIORI

Ambito concettuale

- Aritmetica: addizioni e moltiplicazioni, successioni e loro costruzione

Analisi del compito

- Continuare eventualmente la successione delle figure e contare il numero di fiammiferi in ciascuna e organizzare una lista di numeri associati a quella delle figure per completarla più avanti
- Constatare (anche senza altre figure) che si passa da una figura all'altra aggiungendo 5
- Constatare che per la seconda figura sono stati aggiunti 5 fiammiferi (si è aggiunto 5, 1 volta) ai 12 iniziali; per la terza figura si aggiunge 5 due volte, dunque per la quarta si aggiunge 5 tre volte e così via: per la centesima si aggiunge 5, 99 volte

  aggiungere quindi 99 volte 5 ai 12 fiammiferi iniziali per ottenere 12 + 99 x 5 = 507.

O/e: presentare i risultati sotto forma di tabella:

figura	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…	20	…	30	…	40	…	80	…	100
fiammiferi	12	17	22	27	32	37	42	47	52	57	…	107	…	157	…	207	…	407…	…	507

e osservare le sequenze delle cifre 2 e 7 per le unità, e delle cifre delle decine per saltare delle tappe lavorando di 10 in 10, di 20 in 20, etc.

Oppure, trovare la legge di passaggio che permette poi di determinare l'immagine di 100

- utilizzare la relazione moltiplicare per 5 e aggiungere 7 (l'espressione funzionale f(x)=5x+7non è ovviamente attesa nelle categorie 5 e 6) per trovare la risposta attesa (507)

Oppure, senza costruire la successione, né passare per una procedura funzionale, rendersi conto che la 100ma figura avrà una lunghezza di 101 e calcolare i fiammiferi orizzontali: 3 x 101 e quelli verticali 2 x 102

Livello: 5 – 6 - 7

Origine : Suisse romande e incontro di Bourg-en-Bresse

Figura 8-10. – L'analisi del problema "Griglie di fiammiferi" fornita dall'ARMT

Questa pubblicazione, Il ruolo del docente nella gestione della messa in comune, scritta da Giuseppe Pincolini, è rilasciata sotto Creative Commons Attribuzione – Non commerciale 3.0 Unported License.