LAVORO DI DIPLOMA DI

LORENZO FAVILLI

MASTER OF ARTS IN SECONDARY EDUCATION

ANNO ACCADEMICO 2016/2017

LA PROBABILITÀ COME RISORSA PER L'INSEGNAMENTO-APPRENDIMENTO IN MATEMATICA

RELATORE

MICHELE IMPEDOVO

Sommario

Introduzione 1

Domanda di ricerca 2

Quadro teorico 3

Quadro metodologico 7

Attività introduttiva 7

Valutazione diagnostica 10

Costruzione di alcuni concetti fondamentali 12

La definizione classica di probabilità 13

Esercizi probabilistici vari, applicati anche all'ambito insiemistico 14

Spiegazione della teoria degli insiemi 16

Analisi dei dati 19

Attività introduttiva: analisi dei dati 19

Valutazione diagnostica: analisi dei dati 20

Costruzione di alcuni concetti fondamentali: analisi dei dati 22

Definizione classica di probabilità: analisi dei dati 24

Esercizi probabilistici vari, applicati all'ambito insiemistico: analisi dei dati 25

Spiegazione della teoria degli insiemi: analisi dei dati 28

Un parere da parte della classe 30

Conclusioni 37

Bibliografia 39

Introduzione

Durante lo svolgimento di questo anno scolastico, sono stato confrontato con la formazione di una prima media ed ho voluto sperimentare l'utilizzo della probabilità, non solo come un ambito, seppur stimolante e ricco di contenuti, fine a sé stesso, ma anche come ausilio per capire, consolidare e approfondire altri ambiti, in particolare quello insiemistico. Questo argomento è spesso considerato piuttosto ostico da parte dei ragazzi, forse per la presenza di pochi esempi pratici, che potrebbero, invece essere incrementati tramite tecniche probabilistiche.

L'utilizzo poi anche di altri ambiti, numerico e geometrico, visti in chiave probabilistica, è stato sicuramente d'aiuto nella costruzione di competenze insiemistiche atte a creare una visione della matematica non come una materia "a scompartimenti", ma come una macchina fatta di molti ingranaggi interconnessi.

Durante quest'anno ho creato dunque una sorta di *clima di onnipresenza* da parte della probabilità, mediante la preparazione di attività particolari che permettessero di studiare un aspetto probabilistico in argomenti insospettabilmente collegati proprio a questo particolare ambito.

Verifiche di tipo diagnostico, formativo e sommativo sono state somministrate ai ragazzi per controllare l'andamento dell'itinerario didattico e per correggere eventuali errori di percorso. È stato anche importante il loro feed-back.

La probabilità e la statistica sono degli aspetti della matematica spesso ignorati o sottovalutati nelle nostre scuole. Io stesso ho potuto confrontarmi con questi ambiti solamente durante il primo anno di università. Questo significa che la mia educazione matematica alla scuola media e poi al liceo (sebbene di tipo letterario) è stata completamente priva di aspetti probabilistici e statistici.

Questo avveniva negli anni '90. Oggi, con il piano di formazione e il nuovo piano di studio, la probabilità e la statistica sono, almeno sulla carta, presenti nella formazione matematica delle nuove generazioni. Questo non significa, però, che vengano trattati in maniera adeguata o, in certi casi, del tutto. In una sorta di circolo vizioso, molti insegnanti, a cui non è stata data una buona formazione nel corso della loro educazione, preferiscono dare poca importanza a questi argomenti, proprio per mancanza di sicurezza nelle loro stesse competenze in materia e, così facendo, rischiano di creare una nuova generazione di insegnanti, a loro volta spaventati dalla probabilità e dalla statistica.

Naturalmente l'importanza dell'educazione al pensiero probabilistico non riguarda solo la formazione dei nuovi insegnanti, ma anche, e soprattutto, quella di un cittadino che risponda ai bisogni di una società contemporanea basata sulla democrazia.

Una recente ricerca (Arrigo, 2010) ha dimostrato come l'educazione al pensiero probabilistico sia necessaria già durante la formazione primaria dei ragazzi.

Attraverso una serie di test, fatti svolgere agli studenti da dei docenti volontari nel corso di un anno, G. Arrigo è giunto alla conclusione che, con l'aiuto di insegnanti capaci a creare situazioni probabilistiche interessanti e inerenti alla realtà, i ragazzi possano essere in grado di liberarsi di quelle misconcezioni probabilistiche acquisite in situazioni di vita extra-scolastica (credere nella fortuna, la "fallacia dello scommettitore, ecc…). Il potenziale, dunque, c'è; bisogna saperlo sfruttare.

Domanda di ricerca

È possibile costruire delle solide competenze sulla teoria degli insiemi con un utilizzo mirato della probabilità?

È mia opinione che la concretezza della probabilità sia un buon aiuto per l'apprendimento e possa creare nei ragazzi un interesse anche verso un argomento apparentemente meno attraente come l'insiemistica.

Quadro teorico

In questi anni si sta integrando sempre di più il nuovo piano di studio della scuola dell'obbligo ticinese (DECS, 2015), frutto di un accordo intercantonale che prende il nome di HarmoS. La principale novità in esso contenuta è che, al posto di un programma di studio, formato da un elenco di argomenti da trasmettere agli studenti, vi sono elencate una serie di competenze che i ragazzi devono aver acquisito nel corso dei quattro anni. Con "competenze" non si intende solo un insieme di conoscenze e di capacità pratiche, ma anche una serie di atteggiamenti, sia di lavoro individuale che di cooperazione e, in generale, la capacità di attivare queste conoscenze, queste capacità pratiche e questi atteggiamenti al fine della risoluzione di un problema. Queste competenze non vengono dunque "trasmesse" dall'insegnante, che diventa invece una sorta di mediatore, che aiuta i ragazzi a costruire il loro sapere, dando ad esso un senso preciso ("*un significato intellettuale ed emozionale personale")*. Le competenze acquisite saranno quindi utilizzabili in contesti vari e non fini a sé stesse.

Nel piano di studio non è sicuramente mancante un capitolo dedicato all'insegnamento della matematica, vista la sua importanza come linguaggio della scienza e per lo sviluppo del pensiero logico. Considerare solo questi due aspetti, tuttavia, è decisamente riduttivo, poiché studiare la matematica, specialmente durante il periodo della scuola media, non significa solo acquisire delle conoscenze e delle abilità di calcolo e di analisi di problemi, ma, in linea con il piano di studio, anche una serie di atteggiamenti positivi, come la capacità di giustificare il senso dei risultati, di argomentare e di cooperare con gli altri, che abituino i ragazzi ad una buona convivenza nella nostra società.

Perché questo avvenga, è fondamentale che gli argomenti discussi in classe abbiano un senso per i ragazzi, e questo è possibile solamente se i problemi affrontati sono ispirati a situazioni reali; situazioni che non risultino estranee ai ragazzi, ma che anzi li coinvolgano nel processo di apprendimento e che diano loro la motivazione necessaria. In questo modo, è più probabile che quello che a prima vista può essere considerato un semplice problema di matematica, si trasformi invece in una vera e propria sfida, stimolante per lo studente e appagante anche nel caso di mancata risoluzione.

Tutto ciò è molto importante, poiché la matematica, più diventa complessa e più viene vista da molti ragazzi come una materia astratta e soprattutto di scarsa utilità. Quante volte un insegnante di

matematica, dopo aver spiegato un certo argomento, si è sentito porre la domanda "sì, ma a che serve?". Non è sempre facile rispondere ad una domanda di questo tipo.

Diventa a mio parere più semplice se l'ambito preso in considerazione è quello probabilistico. Questo particolare ambito, che in passato è stato piuttosto sottovalutato, ma che pian piano sta prendendo il suo posto nei vari piani di studio, ha un impatto immediato sulla realtà; non è così scontato pensare ad un problema di probabilità per la scuola media che non sia notevolmente concreto, anche se questo ambito può, invero, diventare decisamente astratto, ad esempio quando si ha a che fare con la teoria della misura; ma si sta parlando di livelli piuttosto alti, di sicuro non di scuola media.

Le ragioni principali che giustificano lo studio della probabilità, secondo I. Gal, che si occupa di alfabetizzazione matematica, sono due:

- La probabilità è parte integrante della matematica e della statistica, due componenti fondamentali dell'educazione moderna.
- Studiare probabilità è essenziale per aiutare a preparare gli studenti alla vita, perché essa è piena di fenomeni casuali e incerti.

Gal sostiene che l'insegnamento della probabilità non si deve ridurre esclusivamente all'acquisizione di tecniche di calcolo (Gal, 2005); questa è solo una parte del percorso che porta alla costruzione di un'alfabetizzazione probabilistica, che comprende anche altri aspetti, come ad esempio il contesto in cui viene proposto un determinato problema o lo sviluppo di un pensiero critico che tenga conto di tutte le possibili variabili presenti nella situazione analizzata. In sostanza, di tutti gli ambiti della matematica, quello probabilistico è quello il cui insegnamento è in costante evoluzione, perché ancora non si è raggiunta la definizione di un insieme di obiettivi chiari da perseguire.

A questo proposito G. Arrigo si è occupato recentemente di analizzare e correggere le misconcezioni probabilistiche dei ragazzi già a livello di scuola elementare, presentando loro delle "semplici" situazioni di calcolo delle probabilità e osservando le loro reazioni (Arrigo, 2010); dopo un intervento della durata di un anno da parte di un gruppo di docenti volontari, è stato presentato ai ragazzi un secondo test e sono state analizzate le risposte per capire se ci fosse stato un progresso. Così, in effetti, è stato: ad esempio, se all'inizio dell'anno il 60% dei ragazzi era convinto che in una sequenza di lanci di una moneta, i primi esiti potessero in qualche modo influenzare le probabilità dei lanci successivi, alla fine dell'anno, dopo l'intervento didattico, la percentuale di ragazzi con questa misconcezione si è ridotta al 40%.

Si noti però che il tipo di apprendimento costruito dai ragazzi e dai docenti deve essere visto come l'ottenimento di un modo di pensare differente da quello deterministico e dunque non come il raggiungimento di obiettivi specifici di tipo concettuale o algoritmico.

La conclusione di Arrigo è che l'alfabetizzazione probabilistica deve già cominciare durante la scuola primaria e che i docenti di matematica devono essere adeguatamente preparati, non nel senso di essere degli esperti di calcolo delle probabilità, ma capaci di creare delle situazioni di studio dell'incerto corrette e ideali allo sviluppo mentale dei ragazzi, e anche abili a rilevare e correggere le eventuali misconcezioni prodotte.

Questa conclusione riprende molto da vicino ciò che sostiene E. Fischbein, che ha lavorato parecchio sulle intuizioni di tipo probabilistico, distinguendo tra quelle frutto della semplice esperienza e tra quelle dovute a un processo di insegnamento-apprendimento.

Gli studi di Fischbein si concentrano in particolare sull'analisi degli interventi didattici e sull'effetto ottenuto da questi su ragazzi di differenti fasce d'età.

La sua conclusione è che interventi più matematicamente specifici, in ambito aleatorio, hanno un buon riscontro in ragazzi che frequentano il secondo biennio di scuola media; si parla quindi di ragazzi nei quali è ben sviluppato il senso della proporzionalità, senza il quale non è così evidente la comprensione della maggior parte dei concetti e dei ragionamenti di tipo probabilistico (Fischbein, 1980).

Per quanto riguarda i ragazzi di età inferiore, come quelli della classe analizzata in questo lavoro di diploma, è comunque possibile un'educazione al pensiero probabilistico, senza però entrare nei dettagli delle definizioni e senza utilizzare dimostrazioni, ma restando nell'ambito dello studio di particolari situazioni problema dipendenti dal caso e provenienti dalla vita di tutti i giorni.

Le analisi di Fischbein riprendono e consolidano le conclusioni degli studi di J. Piaget e di B. Inhelder, che si sono occupati dello sviluppo dei concetti di tipo probabilistico durante la crescita. Essi hanno diviso tale sviluppo in tre fasi (Piaget, 1975):

- Prima fase: dai quattro ai sei anni.
- Seconda fase: dai sette agli undici anni.
- Terza fase: dagli undici ai dodici anni.

I ragazzi della classe concernente questo lavoro di diploma hanno dunque un'età che li pone a cavallo tra la seconda e la terza fase. Abbiamo quindi a che fare, secondo Piaget e Inhelder, con dei

giovani che hanno il potenziale per capire i concetti di caso, di evento possibile e di evento sicuro e di passare dal ragionamento deterministico a quello probabilistico; di interpretare dunque la probabilità come grado di fiducia utilizzando un linguaggio adeguato.

L’ultimo testo a cui intendo fare riferimento è un recente articolo di M. Barra, nel quale si parla di probabilità e del suo insegnamento (Barra, 2016). Il professor Barra analizza in maniera critica diversi aspetti della didattica della probabilità mediante presentazione di questionari e sperimentazioni. Nonostante la maggior parte degli argomenti trattatati siano un po’ troppo complessi per una classe di prima media, l’articolo contiene diversi spunti interessanti, specialmente quando fa riferimento al rapporto con altri ambiti della matematica, quali l’insiemistica e la geometria.

La parte di insiemistica è piuttosto astratta, quindi magari non proprio adeguata per tutti i ragazzi di prima, anche se sono convinto che alcuni di loro sarebbero perfettamente in grado di rappresentare le situazioni probabilistiche proposte mediante diagrammi di Venn. Più adatte sono invece le rappresentazioni di tipo geometrico, che permettono di determinare diverse probabilità mediante il calcolo di lunghezze o aree.

Naturalmente l’utilizzo di geometria e insiemistica per la probabilità è esattamente il contrario dello scopo che si prefigge questo lavoro di diploma, ma tali rappresentazioni possono comunque essere utilizzate per costruire alcuni concetti di base.

Barra sottolinea inoltre l’importanza dell’utilizzo della probabilità per la risoluzione di problemi non necessariamente di tipo probabilistico; egli propone, ad esempio, una breve, ma elegante dimostrazione del piccolo teorema di Fermat e fa riferimento all’utilizzo di un modello probabilistico per la rappresentazione di una situazione appartenente al campo della termodinamica.

Quadro metodologico

Per poter utilizzare dei concetti di probabilità per costruire delle competenze in ambito insiemistico, è necessario creare delle buone basi sulle quali lavorare. Ho scelto dunque, di dividere il lavoro in sei parti.

1. Introduzione alla probabilità con un'attività mirata proposta subito all'inizio dell'anno.
2. Valutazione diagnostica.
3. Costruzione di alcuni concetti fondamentali (eventi certi, possibili e impossibili).
4. Definizione classica di probabilità.
5. Esercizi probabilistici vari, applicati all'ambito insiemistico.
6. Spiegazione della teoria degli insiemi.

Attività introduttiva

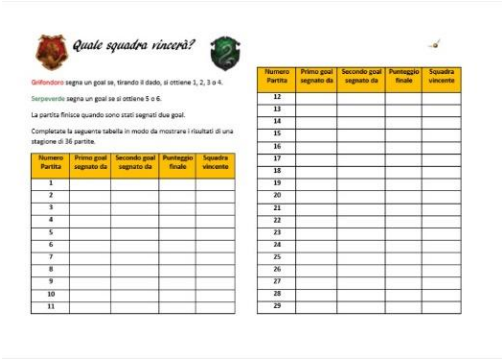
Questa attività viene presentata nella prima lezione dell'anno ed ha come obiettivo quello di dare un'idea ai ragazzi di ciò che è la probabilità, consentendo loro di prevedere l'esito di una successione di eventi equiprobabili.

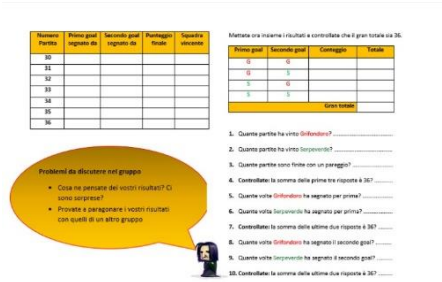
Situazione: alla scuola di magia di Hogwarts, oltre alle consuete e ufficiali partite di quidditch, si svolgono dei mini-tornei con un regolamento semplificato. Le due squadre che si affrontano, continuano a giocare finché non vengono segnati due gol. A quel punto la partita finisce. È dunque possibile che vinca una delle due squadre (risultato: 2-0 o 0-2) o che la partita si concluda con un pareggio (1-1). Questa particolare situazione analizza una serie di 36 partite tra le squadre Grifondoro e Serpeverde.

Per simulare una partita si tirano due dadi a 6 facce in successione. Ogni dado rappresenta un goal. Grifondoro segna se si ottiene un punteggio compreso tra 1 e 4, mentre Serpeverde se il punteggio è 5 o 6.

Nota: ho scelto il tema di Harry Potter e del quidditch per descrivere la situazione, ma naturalmente è possibile utilizzare un qualsiasi sport reale che preveda lo scontro tra due squadre e che possa finire con i punteggi sunnominati (esempio: il calcio).

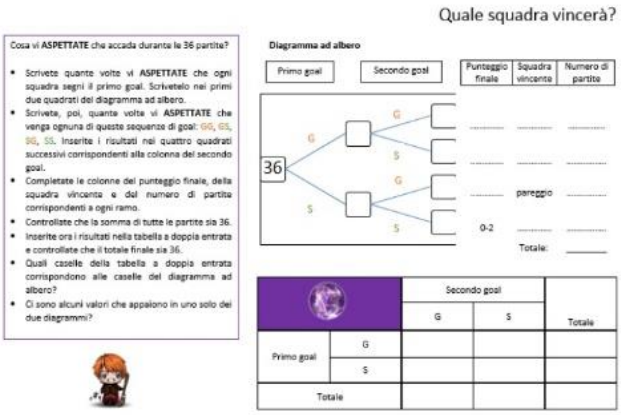
Svolgimento: dopo aver spiegato la situazione, ai ragazzi vengono consegnate le prime due schede, che contengono la tabella che serve per scrivere i risultati di tutte le partite (chi ha segnato il primo goal, chi ha segnato il secondo, qual è il punteggio finale e chi ha vinto).





I ragazzi vengono divisi in *gruppi di 3* e ad ogni gruppo vengono consegnati due dadi a 6 facce. Viene dunque chiesto loro di simulare le prime 6 partite.

Dopodiché viene consegnata loro la terza scheda:

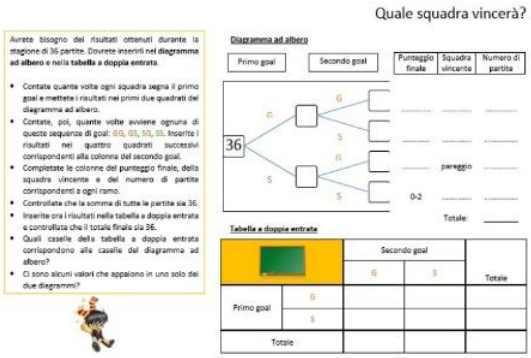


In essa i ragazzi dovranno cercare di prevedere come andranno le 36 partite. I dati saranno inseriti in un diagramma ad albero e in una tabella a doppia entrata. Sarà necessario spiegare, o comunque ripassare, come funzionano questi due tipi di diagrammi.

Una volta completati, i ragazzi potranno riprendere la simulazione nelle prime due schede fino a completare tutte le 36 partite e a rispondere alle domande allegate.

Verrà poi richiesto ad ogni gruppo di *confrontare* i propri risultati con quelli di uno degli altri gruppi.

Dopo averli lasciati discutere, arriverà il momento di confrontare i risultati ottenuti con quelli previsti. Per far questo verrà consegnata loro una quarta scheda, molto simile alla terza:



Quale squadra vincerà?

Avrete bisogno dei risultati ottenuti durante la stagione di 36 partite. Dovrete inserirli nel **diagramma ad albero** e nella **tabella a doppia entrata**.

- Contate quante volte ogni squadra segna il primo goal e mettete i risultati nei primi due quadrati del diagramma ad albero.
- Contate, poi, quante volte avviene ognuna di queste sequenze di goal: GG, GS, SG, SS. Inserite i risultati nei quattro quadrati successivi corrispondenti alla colonna del secondo goal.
- Completate le colonne del punteggio finale, della squadra vincente e del numero di partite corrispondenti a ogni ramo.
- Controllate che la somma di tutte le partite sia 36.
- Inserite ora i risultati nella tabella a doppia entrata e controllate che il totale finale sia 36.
- Quali caselle della tabella a doppia entrata corrispondono alle caselle del diagramma ad albero?
- Ci sono alcuni valori che appaiono in uno solo dei due diagrammi?

Diagramma ad albero

Primo goal | Secondo goal | Punteggio finale | Squadra vincente | Numero di partite

36 — G, S — G, S — G, S

pareggio

0-2

Totale: ____

Tabella a doppia entrata

	Secondo goal		Totale
Primo goal	G	S	
G			
S			
Totale			

Dopo averla completata sarà possibile un confronto diretto. Un ulteriore confronto verrà fatto nella scheda finale, dove due tabelle potranno essere completate inserendo, nella prima, i dati ottenuti dall'esperienza e, nella seconda, quelli previsti.

	Numero di partite	Proporzione su 36		Numero di partite	Proporzione su 36
1. Grifondoro segna il primo goal.			1. Grifondoro segna il primo goal.		
2. Serpeverde segna il primo goal.			2. Serpeverde segna il primo goal.		
3. Grifondoro vince.			3. Grifondoro vince.		
4. Serpeverde vince.			4. Serpeverde vince.		
5. Grifondoro segna per prima, ma poi pareggia.			5. Grifondoro segna per prima, ma poi pareggia.		
6. Serpeverde segna per prima, ma poi pareggia.			6. Serpeverde segna per prima, ma poi pareggia.		

Le due colonne "Proporzione su 36" dovranno essere completate tenendo conto delle conoscenze sulle frazioni già possedute, o non possedute, dagli studenti.

L'attività si concluderà con una discussione sul perché sono state fatte certe previsioni piuttosto che altre, cercando di eliminare alcune misconcezioni sulla probabilità.

Questa attività è stata trovata su internet (NRICH enriching mathematics, s.d.) tradotta e modificata (con il tema "Harry Potter").

Valutazione diagnostica

Dopo l'attività introduttiva, è importante stabilire il livello delle competenze probabilistiche dei ragazzi; le differenze che si riscontreranno saranno dovute sia alle capacità singole di ogni allievo, sia al grado di preparazione fornito dai precedenti docenti di matematica, con in quali hanno lavorano nel corso della scuola elementare.

Per misurare tale livello di competenza, utilizzerò parte del test proposto da G. Arrigo nel suo lavoro sulle misconcezioni probabilistiche dei ragazzi delle scuole primarie (Arrigo, 2010). Verranno dunque poste le sei domande a scelta multipla seguenti (allegato 2).

Esercizio 1: le figurine

Paolo ha delle figurine dei Pokemon in una scatola. Metà di queste figurine sono uguali alle tue e metà, invece, sono diverse. Paolo ti regala delle figurine, ma le devi prendere dalla sua scatola ad occhi chiusi. Secondo te capita sicuramente che:

- circa la metà delle figurine che hai preso sia diversa dalle tue e quindi aumenti così la tua collezione
- esattamente la metà delle figurine sia diversa
- non puoi dire nulla di sicuro su come saranno le figurine prese.

Esercizio 2: gioco dell'oca

Luca si ritiene un giocatore fortunato. Dice che quando tira lui il dado, il 6 (che è il risultato migliore) esce più spesso. Che cosa ne pensi?

- che ha ragione: il risultato può dipendere dalla fortuna di chi tira il dado
- che non è vero
- non so

Esercizio 3: lancio di una monetina

Se lanci una moneta:

- è più probabile che esca Testa
- è più probabile che esca Croce
- può uscire Testa oppure Croce con la stessa probabilità.

Esercizio 4: lancio di un dado

Sara lancia un dado a 6 facce ed esce 5. Lo lancia un'altra volta ed esce ancora 5. Se lo lancia ancora, che cosa ti aspetti?

- che il 5 ha più probabilità di uscire
- che il 5 ha sempre la stessa probabilità di uscire
- che il 5 ha meno probabilità di uscire.

Esercizio 5: scommettiamo?

Ci stai a scommettere con un tuo amico che la tua squadra del cuore vinca la prossima partita:

- anche se hai poca probabilità di vincere
- solo se hai molta probabilità di vincere
- scommetti sempre sulla vittoria della tua squadra

Esercizio 6: bianco o nero?

In un sacchetto ci sono due palline nere e due palline bianche. Senza guardare peschi due palline. Secondo te, è più probabile che:

- escano due palline nere
- escano due palline bianche
- esca una pallina bianca e una nera
- nessuno di questi risultati ha più probabilità dell'altro

Le risposte verranno poi raccolte illustrate in una tabella. I risultati verranno discussi con la classe.

Costruzione di alcuni concetti fondamentali

Per arrivare alla definizione classica di probabilità, è importante fissare prima i concetti di evento certo, possibile e impossibile. Se è vero che la loro definizione sembra banale, è anche vero che spesso i ragazzi di prima media fanno fatica ad applicarle alle varie situazioni problema proposte, incorrendo in misconcezioni.

Durante una verifica formativa, basata anche su altri ambiti, verrà dunque proposta la seguente tabella da completare.

	IMPOSSIBILE	POSSIBILE	SICURO
Il Lugano vincerà il prossimo derby.			
Da un sacchetto contenente 999 biglie rosse e una biglia blu, estrai proprio quella blu.			
Tirando un classico dado a 6 facce, ottieni 7.			
Tirando due dadi a 6 facce, ottieni un valore totale più piccolo di 2.			
Stasera il sole tramonterà.			
Il docente sarà ammalato il giorno della verifica.			
Il nuovo libro di J.K. Rowling (autrice della saga di Harry Potter) sarà un successo.			

Elenco ora alcune aspettative che ho da questo esercizio.

- Alcuni allievi potrebbero basare la risposta alla prima domanda sull'affetto che provano per la squadra del cuore.
- Mi aspetto che alcuni studenti ritengano impossibile estrarre una biglia blu da un sacchetto che ne contiene una su mille.
- Sarà possibile discutere di probabilità "alta" o "bassa".
- Nella discussione riguardante l'ultima domanda, si potrà parlare di eventi precedenti che condizionano la probabilità di un certo esito (in questo caso: essendo la Rowling un'autrice di grande successo, è molto probabile che il suo nuovo libro venderà molto).

Sarà poi possibile andare più nello specifico, introducendo il concetto di evento possibile al 50%. Utilizzerò inizialmente la notazione percentuale, al posto di quella frazionaria, perché già presente

nel linguaggio comune dei ragazzi; dovrò però fare attenzione alla possibile confusione con l'applicazione di questa notazione agli sconti nel mondo del mercato.
Sarà dunque possibile presentare ai ragazzi la seguente tabella, all'interno di una verifica sommativa, che potrà essere, in seguito, spunto per una discussione.

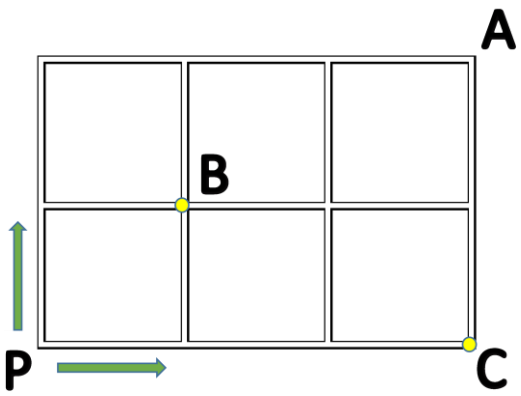
	0 %	50 %	100%	Altro
Tirando un classico dado a 6 facce, ottieni un numero compreso tra 1 e 6.				
Da un sacchetto contenente 12 biglie rosse e 12 biglie blu, estrai una biglia blu.				
Dallo stesso sacchetto estrai tre palline e almeno due di esse sono dello stesso colore.				
Dallo stesso sacchetto estrai due palline e almeno una di esse è nera.				
Questa domenica l'Inter batterà la Roma.				
Scegliendo a caso (con il dado a 24 facce) un allievo della 1A, viene estratta una ragazza.*				
Entro la fine dell'anno il docente avrà perso 5 kg.				
Scegliendo a caso un allievo della scuola media di Canobbio, viene estratto il tuo nome.				

*La classe, di 24 allievi, è composta da 12 ragazzi e 12 ragazze.

A questo punto, i tre concetti di evento certo, impossibile e possibile dovrebbero essere acquisiti. Si potrà quindi entrare più nello specifico, e muoverci verso la definizione classica di probabilità.
Le varie tabelle somministrate ai ragazzi durante le prime verifiche formative e sommative sono raccolte nell'allegato 3.

La definizione classica di probabilità

Se dico che la *probabilità* è il rapporto tra i casi favorevoli e i casi possibili, purché questi siano *equiprobabili*, sto ripetendo la parola definita all'interno della definizione. Nonostante ciò, quella classica è forse la definizione più semplice e adatta che si possa dare a dei ragazzi di prima media.
Il problema della equiprobabilità degli eventi, può rappresentare una misconcezione e potrebbe essere già stato segnalato nelle attività precedenti. Sarà dunque importante fissare in maniera particolare questo aspetto.



Ho scelto come attività introduttiva quella della formica distratta, presente in un testo di educazione al pensiero combinatorio e statistico (Arrigo, Maurizi, Minazzi, & Ramone, 2011), nella quale si chiede di confrontare i percorsi di una formica che sceglie ad ogni bivio la direzione da prendere casualmente (50 e 50); è quindi importante osservare che l'evento nel quale la formica passa per il punto B sia più probabile dell'evento nel quale passa per il punto C. Diverse altre domande, mirate ad eliminare la misconcezione sunnominata, verranno poi poste ai ragazzi (allegato 4).

Verrà poi formalizzata la definizione, utilizzando dei classici esempi con monete, palline e dadi poliedrici, partendo da semplici probabilità (50%, 25%, 75%) e arrivando poi alla notazione frazionaria. L'utilizzo di tabelle a doppia entrata per analizzare le probabilità di certe somme o prodotti di dadi è fondamentale per non incorrere nella solita misconcezione (allegati 5 e 6).

Esercizi probabilistici vari, applicati anche all'ambito insiemistico.

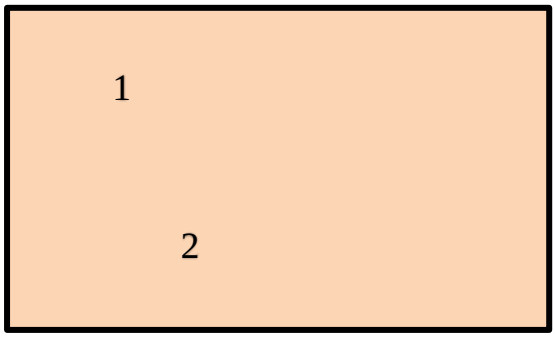
Una volta costruita e consolidata la definizione classica di probabilità, smetterò di fornire ai ragazzi schede riguardanti esclusivamente questo ambito. Vi è comunque un programma di massima da seguire, ed è quindi importante che alla fine dell'anno non ci siano dei buchi negli altri ambiti.

Sarà però interessante far apparire degli aspetti probabilistici nello svolgimento di altre attività. Ad esempio, come scusa per far elencare ad i ragazzi tutti i numeri primi minori di 30, potrò chiedere loro quale sia la probabilità che, tirato un dado poliedrico a 30 facce, si ottenga proprio un numero primo.

Sarà a questo punto che si potrà introdurre degli esercizi di probabilità basati sull'insiemistica, sotto forma di verifica formativa o sommativa. Un esercizio tipo che potrò proporre è il seguente:

Esercizio: viene lanciato un classico dado a 12 facce.

- Scrivi tutti i possibili esiti all'interno del rettangolo illustrato sotto.
- Circonda tutti gli esiti pari con una linea chiusa.
- Circonda i numeri ≤ 5 con un'altra linea chiusa, usando un altro colore.



Rispondi alle seguenti domande:

a) Qual è la probabilità che il valore del dado sia pari? …….

b) Qual è la probabilità che il valore del dado sia ≤ 5? …….

c) Qual è la probabilità che il valore del dado sia pari **<u>oppure</u>** ≤ 5? …….

d) Qual è la probabilità che il valore del dado sia pari **<u>e</u>** ≤ 5? …….

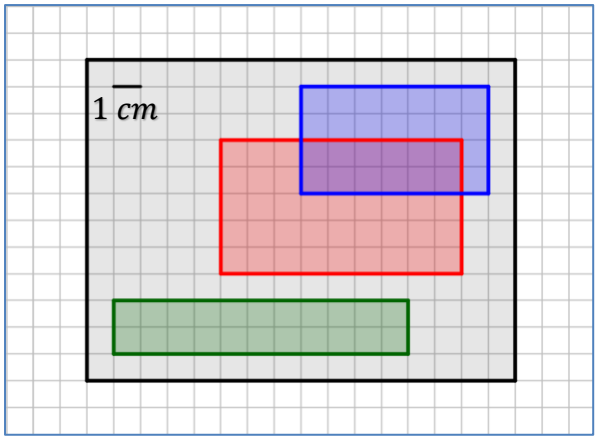
Quindi, senza usare ancora nessuna definizione, i ragazzi lavoreranno con dei diagrammi di Venn e con i concetti di intersezione e unione.

Con ulteriori esercizi simili a questo, ma un po' più complessi, si potranno fornire ulteriori esempi, addirittura avendo anche a che fare con la probabilità condizionata (naturalmente non definita) e analizzando la risposta dei ragazzi ai problemi posti.

Gli esercizi probabilistici applicati all'insiemistica sono tutti raccolti nell'allegato 7.

Sarà poi sicuramente interessante applicare il pensiero probabilistico alla geometria, quando si parlerà di aree e perimetri. Anche qui sarà possibile confrontarsi con l'insiemistica, come si può vedere nel seguente esempio.

Esercizio: Determina le aree dei rettangoli illustrati nella zona quadrettata qui sotto.



A_{grigia} = ...

A_{blu} = ...

A_{rossa} = ...

A_{verde} = ...

Immagina ora di chiudere gli occhi e di puntare una matita casualmente nel rettangolo grigio. Sapendo che ogni punto del rettangolo grigio avrà la stessa probabilità di essere toccato, esprimi la probabilità che…

a) … venga toccato il rettangolo rosso. ……..

b) … venga toccato il rettangolo verde. ……..

c) … venga toccato sia il rettangolo blu che quello rosso. ……..

d) … venga toccato il rettangolo blu oppure quello verde. ……..

e) … venga toccato sia il rettangolo rosso che quello verde. ……..

f) … venga toccato il rettango blu sapendo che è stato toccato quello rosso. ……....

È importante ora precisare una cosa. Il testo dell'esercizio dice che ogni punto del rettangolo ha la stessa probabilità di essere toccato. Questo tecnicamente è vero, nel senso che, avendo a che fare con una distribuzione continua di tipo uniforme, la probabilità di toccare ogni singolo punto è pari a 0. Lo scopo della frase, che avrebbe poco senso in una scuola media superiore o in un'università, è pero quello di stimolare l'intuizione dei ragazzi, in modo che capiscano che sia possibile applicare la definizione classica, senza incorrere nella misconcezione della mancanza di equiprobabilità.

Esercizi su perimetri e aree come questo, verranno proposti durante il secondo semestre e sono raccolti nell'allegato 8.

Spiegazione della teoria degli insiemi

Verso la metà del secondo semestre, si potrà cominciare l'acquisizione di competenze basate sulla teoria degli insiemi. Darei un taglio abbastanza classico alla spiegazione, con qualche piccolo riferimento all'ambito della probabilità. Il libro Base Matematica (Bellini, Frapolli, Ghielmetti,

Tartini, & Villa, 2013), molto diffuso nel Canton Ticino, affronta l'argomento partendo dall'insieme dei numeri naturali, introducendo man mano, con esempi, i vari concetti essenziali: insiemi e loro rappresentazioni, sottoinsiemi, simboli di appartenenza e inclusione, intersezione e unione. Il metodo è piuttosto buono, ma a questo punto sarà necessario analizzare i benefici di tutti i problemi probabilistici affrontati durante l'anno.

Ciò che intendo fare, dunque, è verificare che i ragazzi riescano a padroneggiare i concetti di intersezione e unione senza bisogno di riceverne la definizione. Per far questo, dopo aver dato loro qualche definizione preliminare, somministrerò una verifica di tipo diagnostico (allegato 9), nella quale sarà richiesto di rappresentare alcuni insiemi dati e di svolgere le due operazioni sunnominate. Solo in un secondo tempo verranno definite come intersezione e unione.

L'analisi dell'esito di questa verifica, fornirà i dati necessari per poter rispondere alla domanda di ricerca.

Analisi dei dati

In questo capitolo analizzerò il lavoro svolto durante quest'anno scolastico, basandomi sulla divisione prevista nel quadro metodologico. Per ognuna delle sei parti, prenderò in considerazione gli eventuali dati raccolti, le reazioni della classe e i loro progressi. Cercherò inoltre di valutare in che modo il lavoro possa essere migliorato nelle sperimentazioni future.
Tutte le attività sono state somministrate ad una prima della scuola media di Canobbio. La classe era composta da 24 studenti all'inizio dell'anno; il numero è stato poi ridotto a 23 subito dopo le vacanze di Natale a causa del trasferimento di una studentessa. Nessuno studente era ripetente.
All'interno della classe erano presenti due studentesse affette da dislessia, segnalate all'inizio dell'anno, e uno studente affetto da disgrafia, segnalato solo in un secondo tempo. Nessun caso, invece, di discalculia. Ad una delle due studentesse dislessiche, è stato permesso, su sua richiesta, l'uso del computer con sintetizzatore vocale durante le verifiche formative e sommative. L'altra ragazza non ha fatto tale richiesta.
Essendomi stata assegnata solo questa prima, non mi è stato possibile fare ulteriori sperimentazioni.

Attività introduttiva: analisi dei dati

L'attività introduttiva è stata accolta con entusiasmo e partecipazione. Da un lato, è piaciuto il tema Harry Potter e, dall'altro, la possibilità di "giocare" con i dadi.

La prima osservazione che posso fare è che, per *tutti* e 24 gli allievi, era la *prima volta* che si parlava di probabilità. Il concetto non era completamente nuovo, ma questo a causa del suo utilizzo nel linguaggio parlato e non per studi precedenti durante la scuola elementare. L'attività ha dunque rappresentato per tutti gli allievi il primo impatto con questo ambito.

L'attività si è svolta in un clima vivace, tipico dei ragazzi di quell'età, e il mio intervento è stato più volte richiesto per chiarire diversi dubbi. In particolare, i concetti di diagramma ad albero e di tabella a doppia entrata non erano chiarissimi; è stato dunque necessario esplicitarli, prima individualmente e poi alla classe intera.

A parte questo, è stato possibile giungere alla conclusione nel giro di 3 ore di lezione. Ho potuto constatare che, degli 8 gruppi da tre formatisi, 3 sono stati in grado di prevedere in maniera "corretta", l'esito delle partite, applicando la giusta proporzione. Nella discussione che ne è seguita,

è risultato che alcuni di loro avevano già avuto a che fare con le frazioni alla scuola elementare, nell'ambito del progetto ticinese DiMat. I restanti 5 gruppi hanno comunque cercato di azzeccare la previsione in maniera ragionata e senza produrre numeri a caso.

Dopo l'attività, ho chiesto ad ogni allievo di scrivere, in una mezza pagina, la sua opinione riguardo alla lezione appena svolta. Non ho letto commenti negativi (naturalmente questo non significa necessariamente che non ce ne fossero, magari da parte di qualche studente "timido"); in generale l'attività è stata molto apprezzata e, soprattutto, trovata *insolita*, da parte dei ragazzi, per una lezione di matematica.

Valutazione diagnostica: analisi dei dati

I dati della prova diagnostica (allegato 2) sono stati raccolti nella seguente tabella. Su ogni riga sono segnati il nome della domanda, e il numero di studenti che hanno scelto la corrispondente risposta. La cella in verde indica la risposta corretta.

	1	**2**	**3**	**4**	
1. Le figurine	6	3	15		
2. Gioco dell'oca	5	14	4		*
3. Lancio di una monetina	1	1	22		
4. Lancio di un dado	2	19	2		
5. Scommettiamo?	2	13	8		
6. Bianco e nero	0	0	7	17	
* uno studente ha aggiunto una risposta					

Commento ora, per ognuna delle domande, le risposte date dagli studenti.

1. La maggior parte dei ragazzi (15) ha risposto correttamente alla domanda, ritenendo che non si potesse dire nulla di certo riguardo al numero di figurine doppie pescate. Gli altri 9 hanno fatto fatica a distinguere un evento certo da uno molto probabile. Sarà quindi importante insistere sulla correzione di questa misconcezione.
2. In questa domanda è, in sostanza, richiesto se uno crede o meno nella fortuna. Secondo le risposte ricevute, 5 ragazzi sono "credenti", 14 non lo sono e 4 si ritengono "agnostici". Va però segnalato che uno degli studenti ha aggiunto una risposta alle tre proposte. Alla richiesta della sua opinione sul fatto che Luca si ritenesse fortunato e che affermasse di ottenere più spesso il

risultato 6 su un dato cubico, il ragazzo ha risposto: "*dipende da come tira il dado*", cercando dunque una spiegazione della presunta fortuna nella meccanica del lancio.

3. Nel lancio della moneta, la larghissima maggioranza è convinta, giustamente, che le due facce abbiano la stessa probabilità di essere l'esito di un lancio. I due che hanno risposto diversamente, durante la discussione che ha seguito il test, hanno giustificato la loro risposta con la loro esperienza: lo studente che ha risposto che la testa ha più probabilità di uscire, si ricorda di aver assistito più volte a questo esito che a quell'altro. Analogamente per l'allievo che ha dato l'altra risposta.

4. Questa domanda ha come scopo quello di rilevare la presenza o meno della "fallacia dello scommettitore". Dalle risposte, si evince che solo 2 allievi sono convinti che un evento casuale abbia più probabilità di verificarsi se non si è verificato per un certo periodo di tempo. Più interessanti, forse, sono le risposte date dai 2 ragazzi convinti che la probabilità fosse più bassa. Durante la discussione, però, essi non sono riusciti a giustificare il loro pensiero. Ho deciso dunque di rilanciare durante la seguente verifica sommativa, ponendo la seguente domanda:

Un dado viene tirato 10 volte e il risultato è sempre 6. Scommetteresti 100 franchi sull'uscita di un undicesimo 6? Motiva la risposta.

Il trabocchetto qui è il fatto che non venga specificato che il dado sia equilibrato. Se lo fosse, ottenere 6 dieci volte di fila, sarebbe possibile, ma alquanto improbabile. È quindi auspicabile dire che il dado sia truccato.

Qui purtroppo il 100% della classe, probabilmente in seguito alla discussione sulla valutazione diagnostica, ha risposto che non avrebbe scommesso, mostrando quindi di aver capito cos'è la fallacia dello scommettitore, ma non intuendo che forse non si poteva applicare a questa situazione. Ho dunque portato dei dadi truccati in classe e ho svolto l'esperimento davanti a loro. Con l'esperienza diretta, non è stato difficile che i ragazzi tornassero sui propri passi. L'errore è dovuto probabilmente al fatto che i ragazzi abbiano pensato che la domanda volesse verificare la loro comprensione della fallacia dello scommettitore (contratto didattico), ma è anche possibile semplicemente che abbiano dato per scontato che il dado fosse equilibrato.

5. In questa domanda la classe si è spaccata, con poco più della metà che ha scelto la risposta corretta. I rimanenti 10 hanno confessato di scommettere con il "cuore" invece che con la mente, almeno quando si parla di sport.

6. Questa è l'unica domanda in cui la maggioranza della classe ha dato una risposta sbagliata. Solo in 7 hanno considerato la probabilità di pescare due palline di diverso colore più alta rispetto a

quelle degli altri due esiti. Per correggere questa misconcezione, abbiamo fatto un'esperienza con dei cubetti colorati (in mancanza di palline). Ogni ragazzo ne ha ricevuti due gialli e due neri (non ne avevo di bianchi), ed è stato chiesto loro di provare a pescarne due a caso. Alla lavagna sono stati segnati gli esiti di tre diverse serie di esperimenti, nei quali, per fortuna, gli esiti misti sono stati di più degli altri. Si è poi svolta una discussione per cercare di capire se i ragazzi avessero in chiaro quale fosse la risposta corretta e perché.

Quello che ho potuto osservare, con questa prova diagnostica, è che la maggior parte della classe aveva delle buone basi e doti probabilistiche su cui lavorare, e che sarebbe quindi stato possibile costruire delle solide competenze in questo ambito. Si trattava dunque di lavorare sulle misconcezioni rilevate con qualche attività mirata.

Costruzione di alcuni concetti fondamentali: analisi dei dati

Lo scopo di questa fase è stato quello di chiarire la differenza tra eventi certi, possibili e impossibili, con particolare attenzione al problema del senso della proporzionalità (Fischbein, 1980), non ancora del tutto sviluppato in alcuni ragazzi dell'età di questa classe.

Ho deciso di commentare una delle attività svolte durante questa fase. Qui di seguito è riportata la tabella che illustra le risposte date nell'esercizio di probabilità proposto nel corso della prima verifica sommativa (allegato 3).

	0%	50%	100%	Altro	
1. Tirando un classico dado a 6 facce, ottieni un numero compreso tra 1 e 6.	0	3	21	0	
2. Da un sacchetto contenente 12 biglie rosse e 12 biglie blu, estrai una biglia blu.	0	19	1	3	*
3. Dallo stesso sacchetto estrai tre palline e almeno due di esse sono dello stesso colore.	0	10	4	10	
4. Dallo stesso sacchetto estrai due palline e almeno una di esse è nera.	13	8	1	2	
5. Questa domenica l'Inter batterà la Roma.	0	15	0	9	
6. Scegliendo a caso (con il dado a 24 facce) un allievo della 1 A, viene estratta una ragazza.	0	19	1	4	
7. Entro la fine dell'anno il docente avrà perso 5 kg.	1	11	0	12	
8. Scegliendo a caso un allievo della scuola media di Canobbio, viene estratto il tuo nome.	0	9	0	15	
* uno studente ha dato due risposte diverse					

Commento ora i dati che appaiono nella tabella. Alcune risposte un po' bizzarre sono frutto di una scelta casuale da parte di uno o due allievi che al momento di questa prova non avevano ancora ben chiaro i concetti discussi a lezione.

1. Salvo tre eccezioni, probabilmente dovute ad una cattiva lettura del testo, i ragazzi non hanno avuto problemi a riconoscere l'evento certo.

2. Anche qui, la larga maggioranza ha dato la risposta corretta.

3. In questa domanda c'è la prima anomalia. Solo in 4 hanno riconosciuto l'evento come certo. Gli altri 20 lo hanno visto come possibile (10 di loro con una probabilità del 50%). La spiegazione è forse dovuta ad una lettura troppo frettolosa del testo. Infatti, messi i ragazzi davanti alla situazione concreta, con i cubetti, i ragazzi non hanno avuto nessun problema a riconoscere l'errore e a correggerlo.

4. Qui è accaduto qualcosa di interessante. Una leggerissima maggioranza (13 su 24) è riuscita a dare la risposta corretta. Da un lato, c'è ancora il problema della lettura frettolosa e scorretta del testo. Dall'altro, però, c'è un problema nel riconoscere l'evento impossibile come una possibilità. Durante la prova, più di un allievo si è rivolto a me chiedendomi come fosse possibile che, in un sacchetto contenente palline rosse e blu, se ne estraesse una nera. L'osservazione era naturalmente corretta, ma questi ragazzi hanno pensato che fosse un mio errore nella stesura del testo, piuttosto che scegliere immediatamente l'opzione dell'evento impossibile.

5. In questa domanda, nessuno ha scelto l'opzione dell'evento certo, né quella dell'evento impossibile. Questo potrebbe essere un buon segnale, perché può significare che non si sono lasciati condizionare dalla squadra del cuore (in classe vi sono diversi tifosi interisti). C'è però un altro problema: la maggioranza (15 su 24) ha ritenuto che l'Inter avesse il 50% di battere la Roma. In sostanza, vedendo solo due possibili esiti, hanno dato per scontato che la distribuzione fosse uniforme. Questo è accaduto nonostante avessimo più di una volta lavorato su questo problema con diversi esempi, anche in ambito sportivo.

6. Qui non sembrano esserci stati troppi problemi. La larga maggioranza (19 su 24) ha scelto la risposta corretta.

7. Qui si è ripresentato lo stesso problema della domanda numero 5, anche se riguarda un numero minore di allievi: alla vista di due possibili esiti, 11 ragazzi hanno dato per scontato che ognuno di essi avesse la probabilità di accadere del 50%.

8. Come sopra, anche se questa volta riguarda solo 9 allievi. Probabilmente in questo caso è piuttosto palese che la probabilità di essere estratti sia piuttosto bassa, quindi sono meno le persone che sono incorse nella misconcezione.

Questa particolare attività ha messo in luce alcune difficoltà. I ragazzi non sempre si fermano a riflettere sul testo scritto e cercano di seguire i dettami del contratto didattico. È anche utile cercare di contestualizzare questo esercizio, poiché si è svolto all'interno di una verifica sommativa. Alcuni errori sono dunque da giustificare con lo stress della prova che può indurre una mancanza di concentrazione, provocando letture frettolose e inaccurate. In una sperimentazione futura, penso sia meglio svolgere alcuni di questi test in contesto più fine a sé stesso e non all'interno di verifiche più generali, siano esse formative o sommative. Questo porterà sicuramente ad una maggiore riflessione da parte dei ragazzi, che potranno concentrarsi più accuratamente sui problemi posti.

La lettura frettolosa può giustificare alcuni degli errori; la misconcezione degli eventi equiprobabili non ritengo sia uno di questi. La lettura dei dati mi fa pensare che, quando è stato proposto questo esercizio, tale misconcezione fosse presente in una buona fetta della classe. Poiché in seguito avrei proposto la definizione classica di probabilità, è stato importante mirare subito alla correzione con diversi altri esempi, perché, altrimenti, dopo essersi esercitati con dadi e palline, è possibile che i ragazzi avrebbero trovato ancora di più difficoltà a distinguere tra eventi equiprobabili e non.

Definizione classica di probabilità: analisi dei dati

L'attività della formichina distratta (allegato 4) è proprio servita alla correzione della misconcezione rilevata nella precedente fase. Per consolidare meglio quanto visto, è stato necessario l'utilizzo di tabelle a doppia entrata per la descrizione di eventi dipendenti da due variabili (lancio di due monete, lancio di due dadi) in modo che i ragazzi potessero proprio contare tutti i possibili esiti (allegati 5 e 6).

Riporto qui alcune osservazioni fatte durante questa fase.

- 10 allievi su 24 sono riusciti ad intuire subito quali frazioni corrispondessero a probabilità superiori, inferiori o uguali al 50%. Alla fine delle attività, 22 su 24 hanno acquisito questa capacità.
- Dato un esperimento di Bernoulli, 13 allievi su 24 sono stati in grado, conoscendo la probabilità di uno dei due possibili esiti, di determinare la probabilità dell'esito contrario.

- Dopo aver completato la tabella che mostra tutti i possibili esiti di somma o prodotto ottenuti lanciando due dadi, è stato piuttosto facile per la maggior pare dei ragazzi (in media 18 su 24) rispondere correttamente alle domande poste contando le caselle interessate.
- Nella seconda verifica sommativa, è stato proposto un esercizio nel quale venivano proposti alcuni eventi e veniva richiesto, per ognuno di essi, di determinarne la probabilità e di precisare se essa fosse superiore o inferiore al 50% (tabella 4, allegato 3). Qui di seguito sono riportati i punteggi ottenuti in tale esercizio dai 24 allievi. Il punteggio massimo era 24. La media dei punteggi è stata di circa *15,96*.

Allievo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Punteggio	12	18	14	24	22	16	10	20	9	23	9	24
Allievo	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
Punteggio	20	18	22	20	14	22	11	13	5	*10*	14	13
Punteggio massimo	**24**											
Media	**15,96**											

Esercizi probabilistici vari, applicati all'ambito insiemistico: analisi dei dati

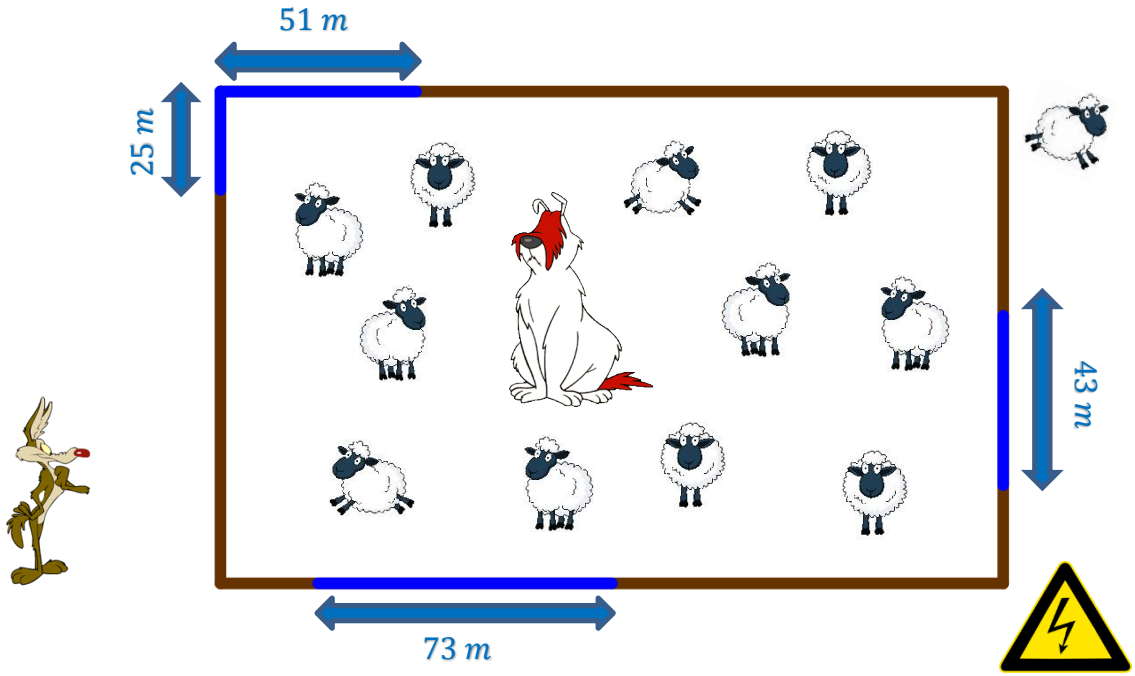
Riporto qui di seguito la tabella con i punteggi ottenuti nel primo esercizio di probabilità con aspetti insiemistici "nascosti" con il quale i ragazzi si sono confrontati in una verifica sommativa. Prima di questo, gli studenti, avevano avuto a che fare con un problema simile (vedi primi due esercizi dell'allegato 7).

Allievo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Punteggio	8	12	17	18	12	11	12	18	12	18	10	15
Allievo	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
Punteggio	18	14	18	11	12	18	14	13	8	11	15	8
Punteggio massimo	**18**											
Media	**13,46**											

L'esercizio è stato quindi svolto con una media del 75% circa. Un risultato decisamente positivo, che ha posto delle buone basi per la costruzione delle competenze insiemistiche. Alcune difficoltà erano state avvertite nella preparazione a questa verifica. Se, infatti, il concetto di intersezione era piuttosto chiaro, non lo era tanto quello di unione (nota che, in entrambi i casi, non si parlava ancora di intersezione e unione, ma si mostrava degli esempi di tali concetti). In particolare, i ragazzi tendevano a considerare l'unione con un "o" di tipo "aut" e non "vel", rendendo necessario un piccolo intervento mirato. Il buon risultato ottenuto dalla classe in questa verifica sommativa può essere letto come un successo didattico, ma bisogna comunque fare attenzione a studenti troppo "scolastici", che potrebbero aver imparato a memoria il concetto senza capirlo a fondo.

Nella verifica successiva è stato proposto un esercizio simile, un po' più visivo; si trattava infatti, di scegliere a caso dei gatti con delle caratteristiche diverse. Nonostante la classe abbia di nuovo ottenuto un buon punteggio (una media del 68% circa), una domanda in particolare ha creato un po' di discussione.
Qual è la probabilità che il gatto non sia a strisce oppure che il gatto non sia arancione?
Questo equivale a chiedere quale sia la probabilità che il gatto non sia allo stesso tempo a strisce e arancione (legge di De Morgan). Sono in pochi gli studenti che hanno risposto correttamente (4 su 24). In particolare, una ragazza normalmente piuttosto portata per la matematica, non riusciva a convincersi della spiegazione: era convita di avere a che fare con un "aut" e che, quindi, i gatti non a strisce e non arancioni non dovessero essere contati. La discussione è andata avanti per un po' di tempo, ma alla fine il concetto è stato assimilato.

Nel corso della stessa verifica sommativa, ho proposto, come esercizio *non obbligatorio*, uno di probabilità applicata alla geometria; questo tipo di esercizio non era mai stato visto prima. L'obiettivo era quello di vedere quanti ragazzi sarebbero stati in grado di risolverlo intuitivamente. Il problema richiedeva di calcolare la probabilità che Ralph il lupo evitasse di prendere la scossa, scavalcando il recinto delle pecore in una zona blu, non elettrificata.



Interessanti sono state un paio osservazioni che mi sono state fatte dai ragazzi durante la prova.

- *Ma se Ralph, nel disegno, si trova a sinistra del recinto, non dovrebbe quindi essere più alta la probabilità che scelga una zona a sinistra?*
- *Ralph non potrebbe evitare il recinto, andando a prendere la pecora in alto a destra che è appena saltata fuori dal recinto?*

Queste domande potrebbero far sorridere, ma sono indice di un pensiero laterale, che va a contrastare il contratto didattico e che spesso si perde negli anni a venire.

Riporto qui di seguito i punteggi e la media ottenuti in questo esercizio facoltativo.

Allievo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Punteggio	0	6	6	6	4	0	0	5	0	0	0	4
Allievo	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**
Punteggio	4	1	6	6	0	5	0	0	0	2	6	6
Punteggio massimo	**6**											
Media	**2,75**											

Ho dato almeno un punto a chi dimostrava di aver almeno provato a risolverlo. I 10 studenti che hanno preso 0 punti sono dunque coloro che hanno lasciato l'esercizio in bianco. Sono in 7 su 24, invece, i ragazzi che hanno risposto correttamente alla domanda, ai quali possiamo aggiungere i 5 ragazzi che hanno fatto almeno 4 punti, che ho assegnato a chi è stato in grado di intuire la regola probabilistica per risolvere il problema (l'errore di questi 5 ragazzi è stato infatti nel calcolo del perimetro). Questo vuol dire che quasi la metà della classe ha intuito come risolvere un problema di probabilità applicato alla geometria (con distribuzione uniforme) mai visto prima.

Durante il secondo semestre, con lo studio delle aree, sono stati proposti degli analoghi esercizi di probabilità. Due di essi sono stati assegnati durante due verifiche sommative (allegato 8) ed hanno ottenuto una media, rispettivamente, del 69% circa e del 60%. Il calo nel secondo problema è dovuto più alla difficoltà di calcolo delle aree di triangoli e trapezi, che a difficoltà di tipo probabilistico.

Spiegazione della teoria degli insiemi: analisi dei dati

Nota iniziale: in quest'ultima fase, gli allievi della 1 A sono diminuiti di un'unità; come ho spiegato prima, infatti, durante le vacanze natalizie, la famiglia di una studentessa si è trasferita.

La lezione introduttiva sugli insiemi è stata di tipo piuttosto tradizionale con definizioni basilari (insieme, elemento di un insieme, sottoinsieme), notazioni varie e i tre tipi di rappresentazione (estensione, proprietà caratteristica, diagramma di Eulero-Venn). Ad un certo punto una ragazza è intervenuta dicendo che stava avendo alcune difficoltà a capire, in quanto non vedeva un'immediata applicazione dell'argomento alla realtà. Ho dunque deciso di anticipare il collegamento con la probabilità che intendevo fare in seguito e ho cercato di rivedere ogni definizione in chiave probabilistica. Gli elementi di un insieme, sono dunque diventati gli esiti di un esperimento aleatorio ed è stato quindi possibile richiamare i problemi risolti nei mesi precedenti.

Dopo le definizioni di base, ho somministrato ai ragazzi la verifica diagnostica (allegato 9). Mi interessava, in particolare, la rappresentazione dei concetti di unione e intersezione. Descritti due insiemi A e B, dopo averli rappresentati per estensione e con diagramma di Eulero-Venn, ai ragazzi è stato chiesto rappresentarne l'intersezione e l'unione. Quest'ultime parole non sono state ancora utilizzate. Si chiedeva invece di rappresentare l'insieme degli elementi che appartenessero ad A *ed* a B e poi quello degli elementi che appartenessero ad A *oppure* a B. Veniva dunque usato lo stesso linguaggio visto negli esercizi di probabilità.

Ho potuto constatare che 13 allievi su 23 hanno risposto correttamente alle domande poste. L'errore più comune riscontrato, commesso da 7 allievi, sui 10 rimanenti, è stato quello di non contare gli elementi dell'intersezione tra A e B nella rappresentazione dell'unione. Dunque, ancora una volta, c'è stata confusione tra un "aut" e un "vel".
Visti i risultati più che positivi riscontrati nei precedenti esercizi di probabilità, mi aspettavo forse qualcosa di più di 13 allievi su 23 (circa il 56,5%), ma è anche vero che si trattava del primo impatto con il mondo dell'insiemistica e forse non tutti avevano ancora capito a fondo il collegamento con la probabilità.

In seguito a questa prova, sono state finalmente definiti i concetti di intersezione e unione, riferendosi sempre alle attività di probabilità svolte in precedenza. Il lavoro svolto è stato dunque messo alla prova nell'ultima verifica sommativa, con un esercizio di insiemistica. Sono stati dati i tre seguenti insiemi:

$A = \{x \in \mathbb{N}\ tali\ che\ x \leq 7\}$

$B = \{6; 7; 8; 9; 10\}$

$C = \{tutti\ i\ numeri\ primi\ minori\ di\ 6\}$

È stato dunque richiesto di rappresentare per estensione gli insiemi $A \cap B, A \cup B, B \cap C$ e $A \cup C$. Questo ha permesso anche di vedere un paio di casi particolari: l'intersezione tra due insiemi disgiunti e l'unione tra un insieme e un suo sottoinsieme. La situazione andava poi rappresentata in un unico diagramma di Eulero-Venn.

Riporto qui di seguito la tabella con i punteggi e la media ottenuti dalla classe.

Allievo	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
Punteggio	3	17	15	20	22	5	12	20	18	21	18	21
Allievo	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	
Punteggio	17	20	22	20	19	22	10	15	18	20	14	
Punteggio massimo	**22**											
Media	**16,91**											

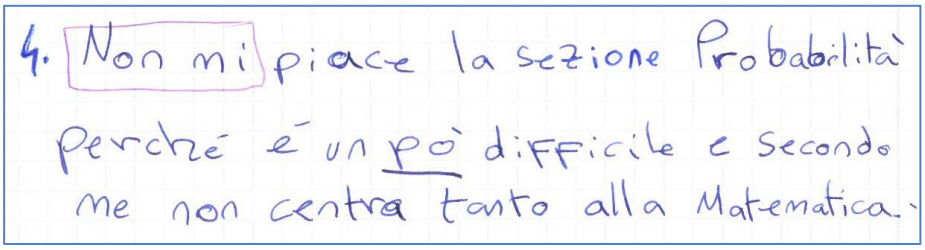
Per leggere meglio la situazione, riporto i dati su un grafico a istogrammi.

Il grafico e la tabella mostrano una riuscita più che buona da parte della classe, con una larga maggioranza che ha ottenuto dei punteggi superiori al 15 (corrispondente al 68% del punteggio totale). La media è del 76,86% circa; questo, unito al buon risultato della verifica diagnostica, sembrerebbe indicare una concreta assimilazione dell'argomento.

Un parere da parte della classe

Come ultima parte di questo capitolo, propongo l'analisi delle risposte che i ragazzi hanno dato ad un piccolo sondaggio che ho richiesto loro di svolgere: ad ogni studente è stato chiesto di mettere in ordine i quattro ambiti della matematica (numeri e calcolo, grandezze e misure, geometria, probabilità) da quello studiato più volentieri a quello meno apprezzato, motivandone la scelta. Nonostante il mio interesse principale fosse il loro indice di gradimento del nuovo ambito, quello probabilistico, mi ha anche fatto piacere avere un quadro generale della loro percezione della matematica.

L'ambito probabilistico è stato messo al primo posto da 5 studenti su 23, al secondo da 14 studenti, al terzo da 2 e all'ultimo posto sempre da 2.


4. Non mi piace la sezione Probabilità perché è un po' difficile e secondo me non centra tanto alla Matematica.

4. Probabilità: non mi piace perché é complicata e noiosa, io non riuscivo a capire come fare.

È interessante leggere il commento, secondo cui la probabilità avrebbe poco a che fare con la matematica, più precisamente con la matematica che l'autrice del commento ha conosciuto negli anni della scuola elementare. Questa novità è stata da lei percepita come qualcosa di negativo, di estraneo, di non familiare.

A parte questo, chi ha messo la probabilità al terzo o al quarto posto, ha giustificato questa scelta con l'alta difficoltà e, in un caso, con la noia.

Probabilità mi annoia un po'.

Nonostante la noia, come scriverò a breve, sia stato un concetto piuttosto ricorrente nei vari commenti inerenti ad altri ambiti, la probabilità è stata invece, di regola, trovata più divertente.

2) A me piace la probabilità perché molto interessante, e facciamo lavori con i dadi.

Probabilita → Mi piace molto perchè bisogna fare pochi calcoli ma si ragiona comunque.

2 st - Probabilità
perchè: l'abbiamo iniziata quest'anno e mi è piaciuta, non mi ha mai dato difficoltà quindi Ok!

Mi piace di più probabilità perchè mette insieme dei confronti e i problemi chiedono cose interessanti che magari usiamo anche quando facciamo dei giochi (con dadi) e non è noioso perchè bisogna ragionare e pensare che ogni cosa ha una probabilità, come e perchè: usando anche schemi e metodi di ragionamento (come usare materiale, cubicini, dadi, ecc...)

3- PROBABILITÀ: questa è la migliore, si va un po' a stima, senza fare tanti calcoli, a volte solo a crocette, quella dove si fa di meno, quella più divertente.

②Probabilità
Mi piace molto, quando facevamo gli esercizi con i dadi, a coppie

In generale, dunque, i ragazzi che hanno apprezzato la probabilità lo hanno giustificato con una maggiore semplicità dell'argomento (almeno a questo livello); l'ambito è stato però trovato anche particolarmente divertente, poiché ha dato la possibilità ai ragazzi di "giocare" durante le lezioni, specialmente nel corso dell'attività introduttiva. Il fatto di manipolare delle situazioni reali, utilizzando dei metodi diversi da quello a cui erano abituati, ha creato delle motivazioni nei ragazzi, che hanno apprezzato la possibilità di ragionare sui problemi dati, senza che essi risultassero poi troppo difficili.

1. Probabilità, perché è la più semplice e la più divertente.

Il fattore noia prima nominato è stato riscontrato in più di un testo. Nonostante il mio tentativo di creare interesse nella materia, con attività che raccontassero storie e che cercassero di dare un senso ai vari argomenti, diversi allievi hanno scritto di aver trovato almeno un ambito, tra i quattro principali, particolarmente noioso; in particolare la geometria, messa all'ultimo posto della classifica da 15 ragazzi su 23, ha ricevuto parecchie critiche.

4- Non mi piace geometria perché la trovo noiosa ed è la materia che mi risulta più difficile.

Geometria NON mi piace, non riesco mai a creare delle forme!

Ho messo ultimo la geometria perché faccio fatica.

"Geometria" non mi va proprio giù perché le diverse forme mi confondono un po' e le diverse aree e perimetri uguale!

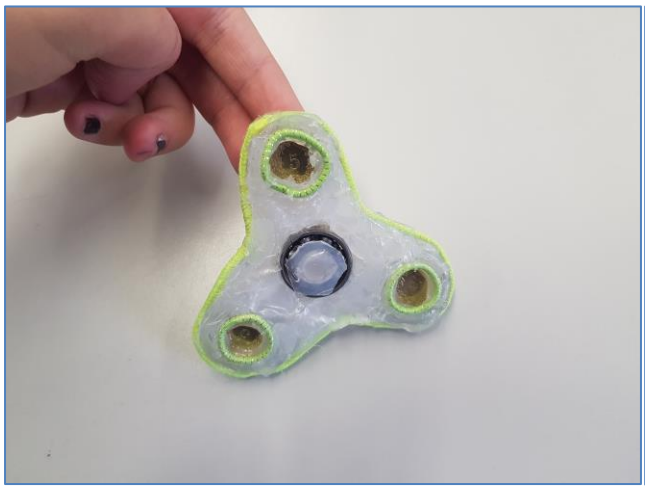
Va precisato che il motivo principale per cui la geometria sembra non essere apprezzata va cercato nel fatto che sia stata percepita particolarmente complessa, o almeno così si evince dai commenti fatti dai ragazzi. Non da tutti, per fortuna.

Geometria è divertente perchè si crea, costruisce, e quando una persona fa qualcosa gli rimane più impresso. Rappresenta le cose che osserviamo toc-chiamo e usiamo ogni giorno ed è bello riflettere su delle cose che già vediamo.

Geometria l'ho messa per prima per la stessa motivazione cioè che mi piace la pratica.

A me piacciono tutte, ma ho messo Grandezze e misure per ultime perchè sono un po' noiose e preferisco le attività di pratica.
Geometria l'ho messa per prima per la stessa motivazione cioè che mi piace la pratica.

In particolare, l'autrice di quest'ultimo commento, ha dimostrato le sue capacità, costruendo da sola e di sua spontanea iniziativa una sua versione del *fidget spinner*, un particolare giocattolo anti-stress, divenuto molto di moda negli ultimi mesi.



In una recente lezione, ho deciso di intavolare con i ragazzi una discussione per capire se il fattore noia fosse solo un problema del mio metodo di insegnamento o se avesse radici un po’ più profonde. Se escludiamo qualche intervento piuttosto colorito (“la matematica non ha più senso una volta che si sa contare; le lettere appartengono ad italiano, non dovrebbero aver nulla a che fare con la matematica”), la classe si è espressa in maniera sincera ed ho potuto constatare che, nella maggior parte dei casi, per coloro che la trovano noiosa, la materia ha smesso di essere interessante nel corso degli ultimi due anni di scuola elementare; questo anche a causa dell’aumento della difficoltà, ma non necessariamente: in particolare mi sono fortemente stupito nel constatare che il ragazzo che ha conseguito durante quest’anno i risultati più brillanti fosse tra i detrattori della materia. Mi sono chiesto se la motivazione dovesse essere cercata nella mancanza di una maggiore sfida, viste le sue notevoli capacità, o in un semplice disinteresse fine a sé stesso. Per contro, alcuni ragazzi non proprio brillanti, ma che riscontrano comunque un andamento più che sufficiente, hanno mostrato apprezzamento, dicendo di trovare divertenti la maggior parte delle lezioni.
Ad una domanda più generale sull’interesse scolastico, i ragazzi hanno confessato di annoiarsi nella maggior parte delle materie, specialmente nello studio dell’italiano e della storia (su quest’ultima hanno commentato “è affascinante, ma noiosa”), e molti di loro hanno dichiarato arti plastiche come la materia preferita perché “non si fa nulla”. La stessa ora di discussione di matematica in cui è emerso tutto questo è stata apprezzata come lezione perché alternativa all’ora tradizionale.

Il quadro che ne è uscito è dunque piuttosto disarmante. In realtà non vi è nulla di inaspettato, ed è forse proprio questo il problema: diamo per scontato che i ragazzi debbano passare una buona parte del tempo a scuola annoiandosi, forse perché anche per noi è stato così. La possibilità di cambiare per permettere ai ragazzi di “imparare divertendosi”, come recita lo slogan di diversi giocattoli educativi, è vista come molto remota, e considerata come una sorta di Santo Graal: un obiettivo

sacrosanto, ma impossibile da ottenere. Forse questo è vero, ma lo scopo dell'insegnante dovrebbe essere comunque quello di tendere in quella direzione.

Conclusioni

Prima di trarre qualunque tipo di conclusione, è bene precisare che la sperimentazione è stata fatta su un'unica classe di 24 persone (23 nella seconda parte dell'anno). Troppo pochi per avere un valore statistico, anche in un cantone piccolo come il Ticino. Ho considerato quindi questa sperimentazione come un punto di partenza per il mio lavoro di docente, un'analisi che ha avuto come scopo farmi un'idea della situazione dell'insegnamento della probabilità e della matematica in generale all'inizio della scuola media in Ticino.

Sono una netta minoranza i ragazzi con un interesse innato nella matematica. La maggior parte degli studenti, per limitare la noia durante le lezioni, ha bisogno di dare un senso immediato a quello che sta studiando. La probabilità potrebbe essere una chiave per raggiungere questo obiettivo perché è forse l'ambito, il cui legame con la realtà è più palese degli altri. Il suo inserimento nel piano di studio della scuola media ticinese è dunque motivato, non solo per l'ambito in sé, ma anche per il suo uso come risorsa per l'insegnamento e per l'apprendimento.

Sono inoltre d'accordo con le conclusioni di G. Arrigo espresse nel suo lavoro sulle misconcezioni relative al concetto di probabilità (Arrigo, 2010), secondo cui la costruzione di competenze dell'ambito probabilistico dovrebbe avvenire già nel corso degli anni di scuola elementare. I ragazzi non hanno avuto troppe difficoltà a capire quali fossero le idee centrali che si trovano dietro questo particolare ambito, come hanno mostrato i risultati delle verifiche effettuate durante quest'anno scolastico. Una preparazione antecedente all'inizio della scuola media permetterebbe quindi l'utilizzo immediato della risorsa probabilistica e la possibilità di inventare qualche attività più complessa e stimolante.

Giungendo dunque alla domanda di ricerca:

È possibile costruire delle solide competenze sulla teoria degli insiemi con un utilizzo mirato della probabilità?

Da quanto ho potuto sperimentare nel corso di quest'anno scolastico, la risposta sembrerebbe essere affermativa.

I ragazzi hanno reagito bene alle attività proposte, hanno accettato la probabilità come parte integrante e gradita della matematica e i risultati delle verifiche sui concetti di teoria degli insiemi hanno indicato una buona acquisizione dell'argomento.

È mia intenzione dunque continuare questo tipo di sperimentazione, sia in prima media, che nelle classi a venire, utilizzando la probabilità come risorsa per la costruzione di competenze di vario tipo, applicando l’ambito a diversi argomenti, come le frazioni e lo studio di particolari figure geometriche.

Bibliografia

Arrigo, G. (2010). Le misconcezioni degli allievi di scuola primaria relative al concetto di probabilità matematica. Rapporto di ricerca. *Bollettino dei docenti di matematica*.

Arrigo, G., Maurizi, L., Minazzi, T., & Ramone, V. (2011). *Combinatoria Statistica Probabilità.* Bologna: Pitagora Editrice.

Barra, M. (2016). Parliamo di probabilità e del suo insegnamento. *Progetti Alice*.

Bellini, L., Frapolli, A., Ghielmetti, C., Tartini, R., & Villa, O. (2013). *Base Matematica 1*. Mendrisio: Edizioni Vignalunga.

DECS. (2015). *Pianio di studio della scuola dell'obbligo ticinese.* Bellinzona.

Fischbein, E. (1980). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children.* Boston: D. Reidel Publishing Company.

Gal, I. (2005). Towards "Probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In *Exploring Probability in Schools: Challenges for Teaching and Learning.* Haifa: Jones, Graham A.

NRICH enriching mathematics. (s.d.). Tratto da http://nrich.maths.org/frontpage

Piaget, J. (1975). *The Origin of the Idea of Chance in Children.* Londra: Routledge and Kegan Pau.

Questa pubblicazione, *La probabilità come risorsa per l’insegnamento-apprendimento*, scritta da Windows User, è rilasciata sotto Creative Commons Attribuzione – Non commerciale 3.0 Unported License.

Quale squadra vincerà?

Grifondoro segna un goal se, tirando il dado, si ottiene 1, 2, 3 o 4.

Serpeverde segna un goal se si ottiene 5 o 6.

La partita finisce quando sono stati segnati due goal.

Completate la seguente tabella in modo da mostrare i risultati di una stagione di 36 partite.

Numero Partita	Primo goal segnato da	Secondo goal segnato da	Punteggio finale	Squadra vincente
1				
2				
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				

Allegato 1

Numero Partita	Primo goal segnato da	Secondo goal segnato da	Punteggio finale	Squadra vincente
12				
13				
14				
15				
16				
17				
18				
19				
20				
21				
22				
23				
24				
25				
26				
27				
28				
29				

Numero Partita	Primo goal segnato da	Secondo goal segnato da	Punteggio finale	Squadra vincente
30				
31				
32				
33				
34				
35				
36				

Problemi da discutere nel gruppo

- Cosa ne pensate dei vostri risultati? Ci sono sorprese?
- Provate a paragonare i vostri risultati con quelli di un altro gruppo

Mettete ora insieme i risultati e controllate che il gran totale sia 36.

Primo goal	Secondo goal	Conteggio	Totale
G	G		
G	S		
S	G		
S	S		
		Gran totale	

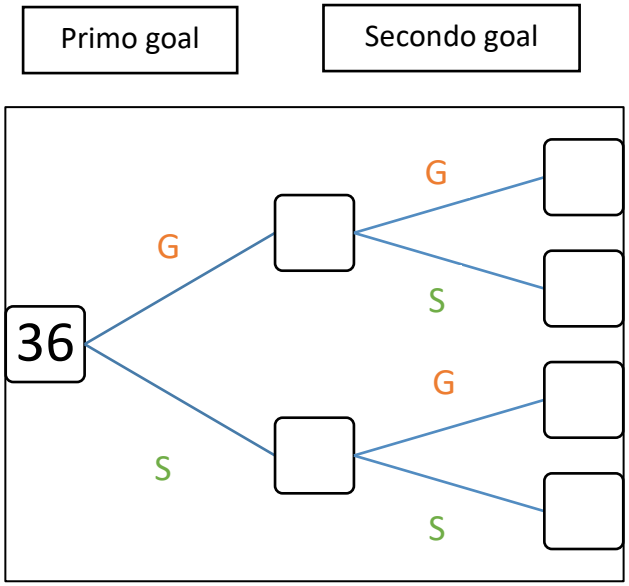
1. Quante partite ha vinto Grifondoro? .....
2. Quante partite ha vinto Serpeverde? .....
3. Quante partite sono finite con un pareggio? .....
4. **Controllate:** la somma delle prime tre risposte è 36? .....
5. Quante volte Grifondoro ha segnato per prima? .....
6. Quante volte Serpeverde ha segnato per prima? .....
7. **Controllate:** la somma delle ultime due risposte è 36? .....
8. Quante volte Grifondoro ha segnato il secondo goal? .....
9. Quante volte Serpeverde ha segnato il secondo goal? .....
10. **Controllate:** la somma delle ultime due risposte è 36? .....

Quale squadra vincerà?

Cosa vi **ASPETTATE** che accada durante le 36 partite?

- Scrivete quante volte vi **ASPETTATE** che ogni squadra segni il primo goal. Scrivetelo nei primi due quadrati del diagramma ad albero.
- Scrivete, poi, quante volte vi **ASPETTATE** che venga ognuna di queste sequenze di goal: GG, GS, SG, SS. Inserite i risultati nei quattro quadrati successivi corrispondenti alla colonna del secondo goal.
- Completate le colonne del punteggio finale, della squadra vincente e del numero di partite corrispondenti a ogni ramo.
- Controllate che la somma di tutte le partite sia 36.
- Inserite ora i risultati nella tabella a doppia entrata e controllate che il totale finale sia 36.
- Quali caselle della tabella a doppia entrata corrispondono alle caselle del diagramma ad albero?
- Ci sono alcuni valori che appaiono in uno solo dei due diagrammi?

Diagramma ad albero



Punteggio finale	Squadra vincente	Numero di partite
.....	.....	.....
.....	.....	.....
.....	pareggio	.....
0-2	.....	.....
	Totale:	_____

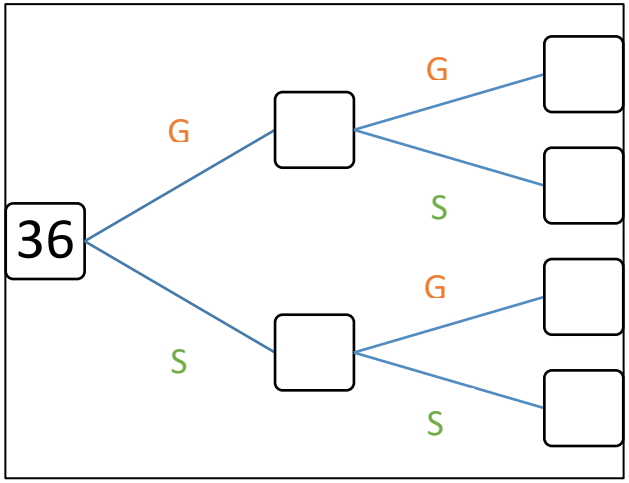
		Secondo goal		Totale
		G	S	
Primo goal	G			
	S			
Totale				

Quale squadra vincerà?

Avrete bisogno dei risultati ottenuti durante la stagione di 36 partite. Dovrete inserirli nel **diagramma ad albero** e nella **tabella a doppia entrata**.

- Contate quante volte ogni squadra segna il primo goal e mettete i risultati nei primi due quadrati del diagramma ad albero.
- Contate, poi, quante volte avviene ognuna di queste sequenze di goal: GG, GS, SG, SS. Inserite i risultati nei quattro quadrati successivi corrispondenti alla colonna del secondo goal.
- Completate le colonne del punteggio finale, della squadra vincente e del numero di partite corrispondenti a ogni ramo.
- Controllate che la somma di tutte le partite sia 36.
- Inserite ora i risultati nella tabella a doppia entrata e controllate che il totale finale sia 36.
- Quali caselle della tabella a doppia entrata corrispondono alle caselle del diagramma ad albero?
- Ci sono alcuni valori che appaiono in uno solo dei due diagrammi?

Diagramma ad albero



Punteggio finale	Squadra vincente	Numero di partite
.....	.....	.....
.....	.....	.....
.....	pareggio	.....
0-2	.....	.....
	Totale:	_____

Tabella a doppia entrata

		Secondo goal		Totale
		G	S	
Primo goal	G			
	S			
Totale				

Usate i diagrammi ad albero e/o le tabelle a doppia entrata delle schede precedenti per completare la seguente tabella, paragonando cioè che vi aspettavate che sarebbe successo con ciò che è effettivamente successo.

	Numero di partite	Proporzione su 36		Numero di partite	Proporzione su 36
1. Grifondoro segna il primo goal.			1. Grifondoro segna il primo goal.		
2. Serpeverde segna il primo goal.			2. Serpeverde segna il primo goal.		
3. Grifondoro vince.			3. Grifondoro vince.		
4. Serpeverde vince.			4. Serpeverde vince.		
5. Grifondoro segna per prima, ma poi pareggia.			5. Grifondoro segna per prima, ma poi pareggia.		
6. Serpeverde segna per prima, ma poi pareggia.			6. Serpeverde segna per prima, ma poi pareggia.		

Da discutere in gruppo:

- Quanto si è avvicinata la vostra previsione alla realtà?
- Ci sono dei risultati che vi hanno sorpreso?

Nome e cognome: …….

Esercizi: introduzione alla probabilità

Esercizio 1: le figurine

Paolo ha delle figurine dei Pokemon in una scatola. Metà di queste figurine sono uguali alle tue e metà, invece, sono diverse. Paolo ti regala delle figurine, ma le devi prendere dalla sua scatola ad occhi chiusi.
Secondo te capita sicuramente che:

- circa la metà delle figurine che hai preso sia diversa dalle tue e quindi aumenti così la tua collezione

- esattamente la metà delle figurine sia diversa
- non puoi dire nulla di sicuro su come saranno le figurine prese.

Esercizio 2: gioco dell'oca

Luca si ritiene un giocatore fortunato. Dice che quando tira lui il dado, il 6 (che è il risultato migliore) esce più spesso.
Che cosa ne pensi?

- che ha ragione: il risultato può dipendere dalla fortuna di chi tira il dado

- che non è vero
- non so

Esercizio 3: lancio di una monetina

Se lanci una moneta:

- è più probabile che esca Testa
- è più probabile che esca Croce
- può uscire Testa oppure Croce con la stessa probabilità.

Esercizio 4: lancio di un dado

Sara lancia un dado a 6 facce ed esce 5. Lo lancia un'altra volta ed esce ancora 5.
Se lo lancia ancora, che cosa ti aspetti?

- che il 5 ha più probabilità di uscire
- che il 5 ha sempre la stessa probabilità di uscire
- che il 5 ha meno probabilità di uscire.

Esercizio 5: scommettiamo?

Ci stai a scommettere con un tuo amico che la tua squadra del cuore vinca
la prossima partita:

- anche se hai poca probabilità di vincere
- solo se hai molta probabilità di vincere
- scommetti sempre sulla vittoria della tua squadra

Esercizio 6: bianco o nero?

In un sacchetto ci sono due palline nere e due palline bianche. Senza guardare peschi due palline.
Secondo te, è più probabile che:

- escano due palline nere
- escano due palline bianche
- esca una pallina bianca e una nera
- nessuno di questi risultati ha più probabilità dell'altro

Esercizi: eventi certi, possibili e impossibili

Questo allegato è una raccolta delle tabelle atte a verificare la comprensione della differenza tra i tre tipi di eventi, che sono state somministrate ai ragazzi della 1A della Scuola Media di Canobbio nel corso dei primi due mesi dell'anno scolastico 2016/17.

Tabella 1 (dalla prima verifica formativa): completa la seguente tabella, indicando se gli eventi descritti sono IMPOSSIBILI, POSSIBILI o SICURI.

	IMPOSSIBILE	POSSIBILE	SICURO
Il Lugano vincerà il prossimo derby.			
Da un sacchetto contenente 999 biglie rosse e una biglia blu, estrai proprio quella blu.			
Tirando un classico dado a 6 facce, ottieni 7.			
Tirando due dadi a 6 facce, ottieni un valore totale più piccolo di 2.			
Stasera il sole tramonterà.			
Il docente sarà ammalato il giorno della verifica.			
Il nuovo libro di J.K. Rowling (autrice della saga di Harry Potter) sarà un successo.			

Tabella 2 (dalla prima verifica sommativa): completa la seguente tabella, indicando la probabilità che ognuno degli eventi descritti si avveri. Nota: con “altro” si intende che l’evento è possibile, ma non ha necessariamente la probabilità del 50 % di accadere.

	0 %	50 %	100%	Altro
Tirando un classico dado a 6 facce, ottieni un numero compreso tra 1 e 6.				
Da un sacchetto contenente 12 biglie rosse e 12 biglie blu, estrai una biglia blu.				
Dallo stesso sacchetto estrai tre palline e almeno due di esse sono dello stesso colore.				
Dallo stesso sacchetto estrai due palline e almeno una di esse è nera.				
Questa domenica l’Inter batterà la Roma.				
Scegliendo a caso (con il dado a 24 facce) un allievo della 1 A, viene estratta una ragazza.				
Entro la fine dell’anno il docente avrà perso 5 kg.				
Scegliendo a caso un allievo della scuola media di Canobbio, viene estratto il tuo nome.				

Tabella 3 (dalla seconda verifica formativa): completa la seguente tabella indicando, per ognuno degli eventi proposti, la probabilità che esso avvenga.
Indica, poi, se tale probabilità è superiore o inferiore al 50 %.

Evento	Probabilità	Più del 50%	Meno del 50 %
Tiri un dado a 24 facce: esce un numero dispari.			
Tiri un dado a 8 facce: ottieni 12.			
In un sacchetto ci sono 12 caramelle all'arancia, 10 al limone e 6 alla liquirizia. Peschi una caramella e **non** vuoi che sia alla liquirizia.			
Tiri un dado a 12 facce: prima o poi tocca terra (cioè non rimane sospeso per aria).			
Tiri un dado a 4 facce e un dado a 6 facce: la **somma** è 6.			
Li ritiri: la **somma** è dispari **e** maggiore di 3.			

Aiutati con la seguente tabella additivia per rispondere alle ultime due domande:

+	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						

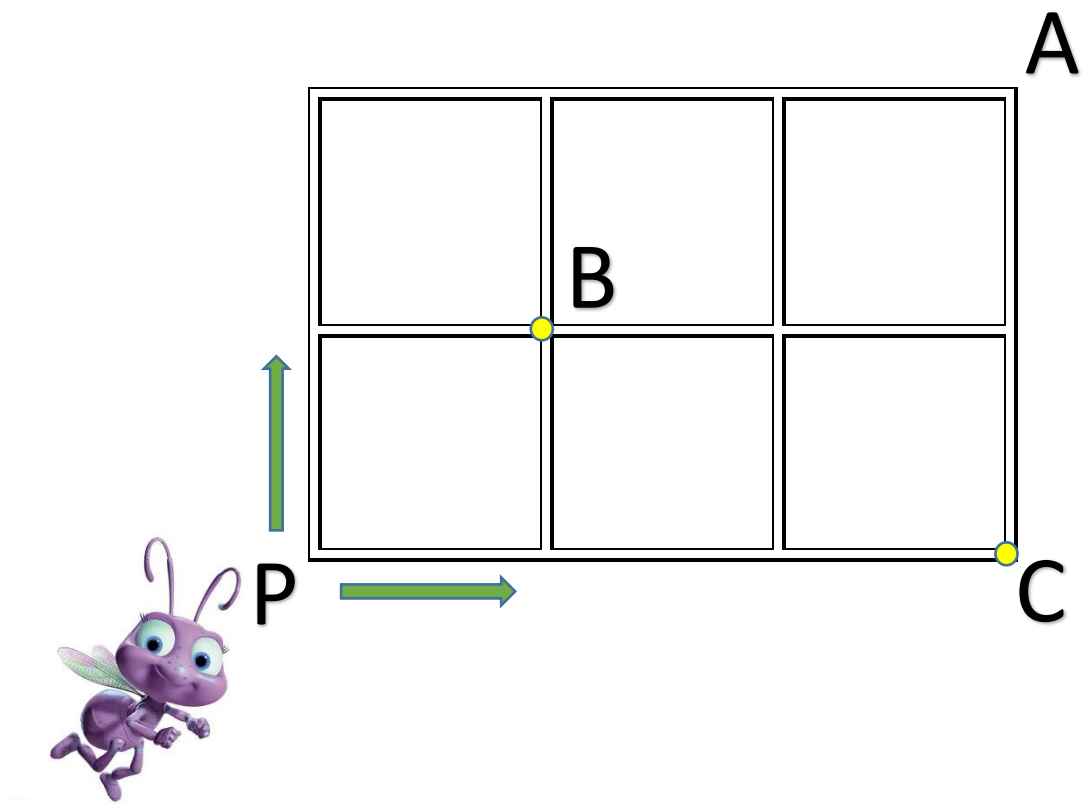
Tabella 4 (dalla seconda verifica sommativa): completa la seguente tabella indicando, per ognuno degli eventi proposti, la probabilità che esso avvenga.
Indica, poi, se tale probabilità è superiore o inferiore al 50 %.

Evento	Probabilità	Più del 50%	Meno del 50 %
Tiri un dado a 30 facce: esce un numero minore o uguale a 15 e maggiore o uguale a 10.			
Un tuo amico ti regala uno dei 6 cuccioli partoriti dalla sua gatta, scelto a caso. 4 di questi gattini sono maschi; a te capita una femmina.			
Scelgo casualmente uno studente della 1A: esce il tuo nome.			
Tiri un dado a 6 facce: ottieni un numero inferiore a 8.			
Tiri un dado a 4 facce e un dado a 8 facce: la **somma** è 9 o 10.			
Li ritiri: la somma **non** è 4.			

Aiutati con la seguente tabella additivia per rispondere ad alcune delle domande:

+ ↗	1	2	3	4	5	6	7	8
1								
2								
3								
4								

Esercizio: la formichina distratta



La formichina Dot, non avendo le ali ancora sviluppate per il volo, percorre una griglia di cunicoli sotto terra, partendo dal punto P, per raggiungere il formicaio, che si trova nel punto A.
Dot ha nascosto una briciola di pane in uno dei nodi (gli incroci) della griglia (non nel punto P), ma non si ricorda in quale. Siccome ha fretta di ritornare a casa, ella percorre i cunicoli solo verso destra o verso l'alto, decidendo in maniera completamente casuale (50%) se cambiare direzione o meno quando si trova davanti ad un bivio.

1) In quale nodo si deve trovare la briciola in modo che Dot la trovi sicuramente?

2) In quale nodo si deve trovare la briciola in modo che Dot non possa trovarla?

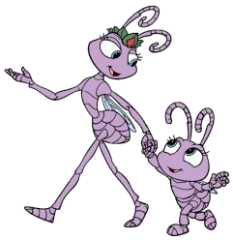
3) Dot ha più probabilità di trovare la briciola se essa si trova nel punto B o nel punto C? Perché?

Risposte:

1) ……

2) ……

3) ……

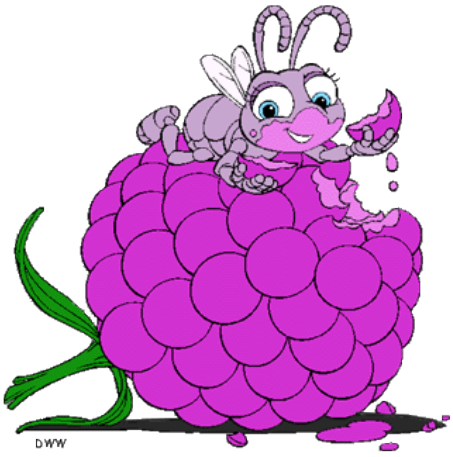


<u>Due domande extra</u>:

a) Quanti possibili percorsi possono essere compiuti da Dot per tornare a casa? …….

b) Sono tutti equiprobabili? …….

c) Qual è la probabilità che Dot passi per il punto B?



Esercizi: monete e dadi

Domanda: vengono lanciate due monete. Qual è la probabilità di ottenere due teste? Qual è la probabilità di ottenere due risultati diversi?

Prova a completare la seguente tabella:

		Seconda moneta	
	↗	T	C
Prima moneta	T		
	C		

1. La probabilità di ottenere due teste è ……

2. La probabilità di ottenere due risultati diversi è ……

Domanda extra: riesci a trovare un esempio originale di un evento che abbia il 25% di probabilità di avverarsi?

……

……

……

……

Problema: immagina di tirare due classici dadi a sei facce e considera la **somma** dei due valori ottenuti. Quali possibili risultati puoi ottenere?

……..

Secondo te, la probabilità di ottenere 12 è la stessa di ottenere 5? Motiva la risposta.

……..

……..

……..

……..

Completa ora la seguente tabella, inserendovi tutti i possibili esiti dell'evento sopra indicato.

		Secondo dado					
	✚ ↗	1	2	3	4	5	6
Primo dado	1						
	2						
	3						
	4						
	5						
	6						

Domande:

1. È più probabile che la somma sia 4 o 5? .....
2. Qual è il valore che ha più probabilità di uscire? …….
3. Quanto vale la probabilità che tale valore esca? ……..
4. Quali sono i valori che hanno meno probabilità di uscire? …….
5. Qual è la probabilità che esca uno di essi?
6. Qual è la probabilità che il valore sia 1? …….
7. Qual è la probabilità che esca un valore pari e minore o uguale a 10? …….
8. La probabilità della domanda 7 corrisponde a più o meno del 50%? …….

   Perché? ……

Esercizi: allenamento per la verifica

Sacchetti con palline

1. In un sacchetto ci sono 7 palline, di cui 4 sono bianche e le altre nere. Qual è la probabilità di estrarre una pallina bianca? ……..

2. In un sacchetto ci sono 5 palline blu e 8 palline verdi. Qual è la probabilità di estrarre una pallina blu? ……

3. In un sacchetto ci sono 3 palline verdi, 2 rosse e 5 blu. Qual è la probabilità di estrarre una pallina rossa? ……. E di non estrarla? ……

Probabilità

1. Scegli tra le seguenti, le probabilità che corrispondono al 50 %:

$$\frac{1}{3},\quad \frac{4}{5},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{22}{44},\quad \frac{33}{100},\quad \frac{7}{14},\quad \frac{50}{100},\quad \frac{1472}{2944},\quad \frac{125}{200}$$

2. Completa la seguente tabella, indicando quali probabilità corrispondono a meno del 50 % e quali corrispondono a più del 50 %.

Probabilità	$\frac{3}{4}$	30%	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{45}{60}$	$\frac{121}{534}$	99%
Meno del 50%								
Più del 50%								

Dadi poliedrici

Vengono tirati due dadi a 4 facce. Completa la tabella, indicando tutti i possibili risultati del **prodotto** dei due risultati. Rispondi, poi, alle domande.

		Secondo dado			
	✖ ↗	1	2	3	4
Primo dado	1				
	2				
	3				
	4				

1. Quale prodotto ha più probabilità di uscire? ……
2. Qual è la probabilità che tale prodotto esca? ……..
3. Qual è la probabilità che esca il prodotto 8? ……
4. È più probabile che esca 6 o 16? ……
5. Qual è la probabilità che esca un prodotto dispari e maggiore di 2? ……..
6. Qual è la probabilità che esca un numero minore o uguale a 4? ……
7. Tale probabilità è minore, maggiore o uguale al 50%? ……..

Esercizi: probabilità e insiemistica

Questo allegato è una raccolta degli esercizi di probabilità applicata all'insiemistica che sono stati somministrati ai ragazzi della 1A della Scuola Media di Canobbio nel periodo a cavallo tra il primo e in secondo semestre dell'anno scolastico2016/17.

Esercizio 1 (dalla terza verifica formativa): viene lanciato un classico dado a 10 facce.

- Scrivi tutti i possibili esiti all'interno del rettangolo illustrato sotto.
- Circonda tutti gli esiti dispari con una linea chiusa.
- Circonda i numeri 2 e 3 con un'altra linea chiusa, usando un altro colore.

1 2

3

Rispondi alle seguenti domande:

a) Qual è la probabilità che il valore del dado sia dispari? …….

b) Qual è la probabilità che il valore del dado sia 2 o 3? …….

c) Qual è la probabilità che il valore del dado sia dispari <u>oppure</u> 2 o 3? …….

Esercizio 2 (dalla terza verifica sommativa): viene lanciato un classico dado a 12 facce.

- Scrivi tutti i possibili esiti all'interno del rettangolo illustrato sotto.
- Circonda tutti gli esiti pari con una linea chiusa.
- Circonda i numeri ≤ 5 con un'altra linea chiusa, usando un altro colore.

1

2

Rispondi alle seguenti domande:

a) Qual è la probabilità che il valore del dado sia pari? …….

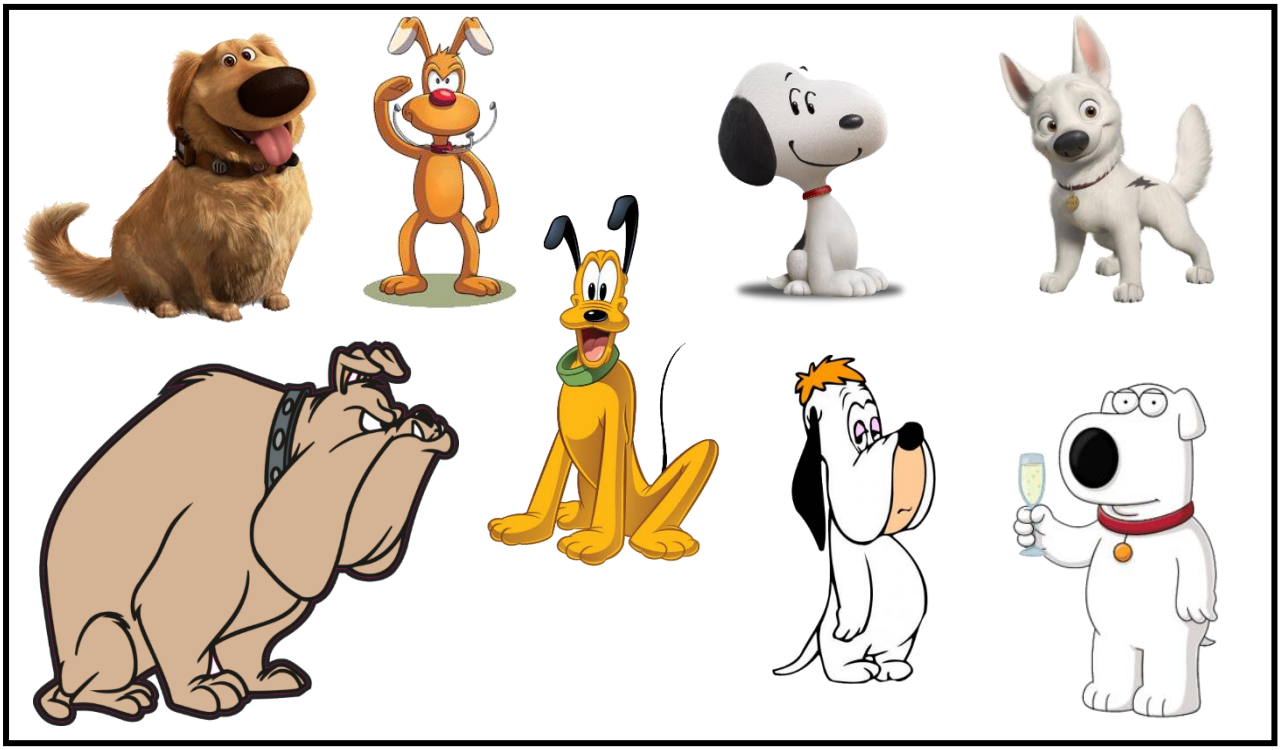
b) Qual è la probabilità che il valore del dado sia ≤ 5? …….

c) Qual è la probabilità che il valore del dado sia pari **<u>oppure</u>** ≤ 5? …….

d) Qual è la probabilità che il valore del dado sia pari **<u>e</u>** ≤ 5? …….

Esercizio 3 (dalla quarta verifica formativa): Charlie si reca in un canile per adottare un cane.

- Nella figura qui sotto, circonda con una linea chiusa colorata tutti i cani dal pelo (per lo più) bianco.
- Con una linea chiusa di un colore diverso, circonda tutti cani dalle orecchie nere.



Sapendo che il proprietario del canile sceglierà in maniera del tutto casuale e che ogni cane avrà la stessa probabilità di essere scelto, rispondi alle seguenti domande:

Qual è la probabilità che…

a) … il cane sia bianco? …….
b) … il cane abbia le orecchie nere? …….
c) … il cane abbia le orecchie nere <u>oppure</u> che sia bianco? …….
d) … Il cane abbia le orecchie nere <u>e</u> che sia bianco? …….
e) … Il cane <u>non</u> sia bianco? …….
f) … il cane <u>non</u> sia né bianco, né abbia le orecchie nere? …….
g) … il cane sia bianco, ma che <u>non</u> abbia le orecchie nere? …….

Esercizio 4 (dalla quarta verifica sommativa): Alice vuole adottare un gattino. Si rivolge dunque all'associazione ticinese GAR (Gruppo Aiuto Randagi).

- Nella figura qui sotto, circonda con una linea chiusa colorata tutti i gatti dal pelo a strisce.
- Con una linea chiusa di un colore diverso, circonda tutti i gatti dal pelo arancione.
- Con un'ulteriore linea, circonda i gatti di sesso femminile.

Sapendo che il gatto da adottare verrà scelto in maniera del tutto casuale e che ogni gatto avrà la stessa probabilità di essere scelto, rispondi alle seguenti domande.

Qual è la probabilità che…

a) … il gatto sia arancione? …….

b) … il gatto sia a strisce oppure che sia arancione? …….

c) … Il gatto sia a strisce e che sia arancione? …….

d) … Il gatto non sia arancione? …….

e) … il gatto non sia né arancione, né a striscie? …….

f) … il gatto sia a strisce, ma non arancione? …….

g) … il gatto sia femmina oppure che sia arancione? …….

h) … il gatto sia femmina e che sia a strisce? …….

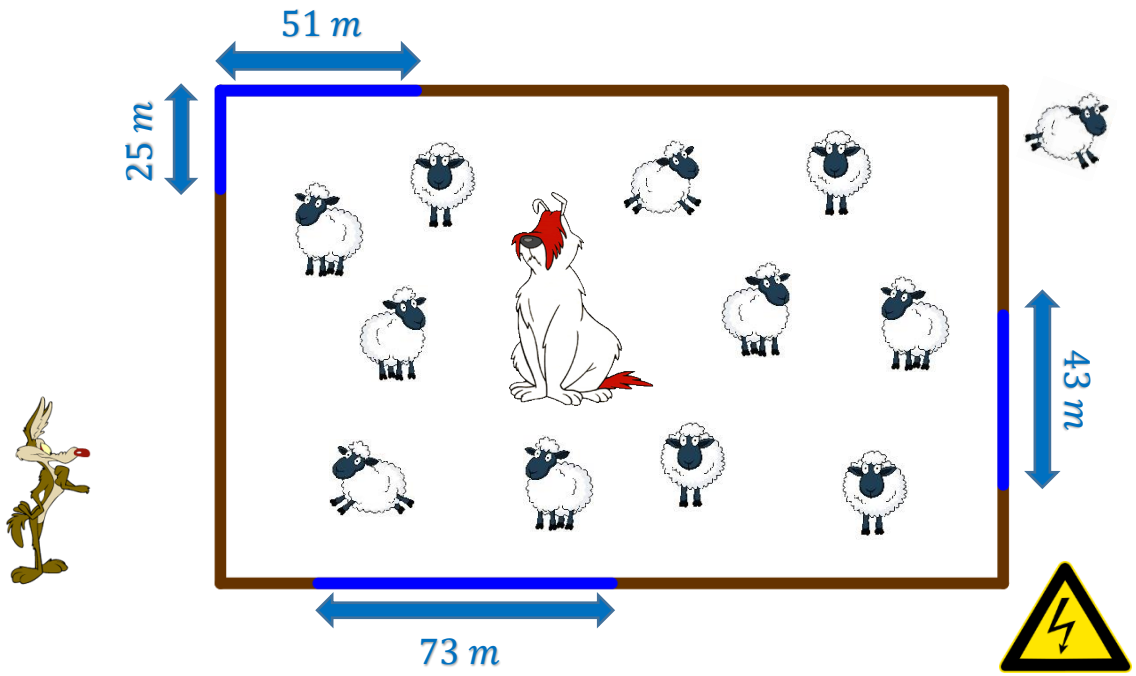
i) … il gatto non sia a strisce oppure che il gatto non sia arancione? …….

j) … il gatto sia arancione, sapendo che è maschio? …….

Esercizi: probabilità e geometria

Questo allegato è una raccolta degli esercizi di probabilità applicata alla geometria che sono stati somministrati ai ragazzi della 1A della Scuola Media di Canobbio nel secondo semestre dell'anno scolastico2016/17.

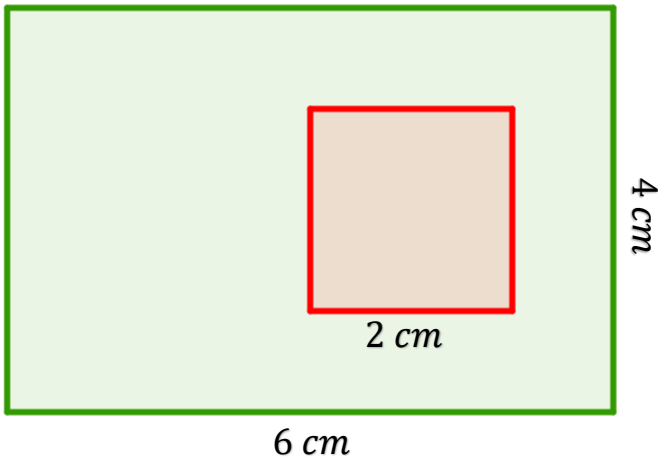
Esercizio 1 (dalla quarta verifica sommativa): Ralph il lupo vuole rubare le pecore che Sam cane pastore sta tenendo d'occhio. Il pascolo è circondato da una recinzione rettangolare il cui lato lungo è di lunghezza doppia rispetto a quella del lato corto, che misura $128\ m$.
Quello che Ralph non sa è che il recinto è elettrificato. Alcune parti della recinzione (segnate in blu nella figura) si sono però guastate e non conducono la corrente.



Sapendo che Ralph sceglierà in maniera del tutto casuale il punto del recinto da scavalcare, calcola la sua probabilità di <u>non</u> prendere la scossa.

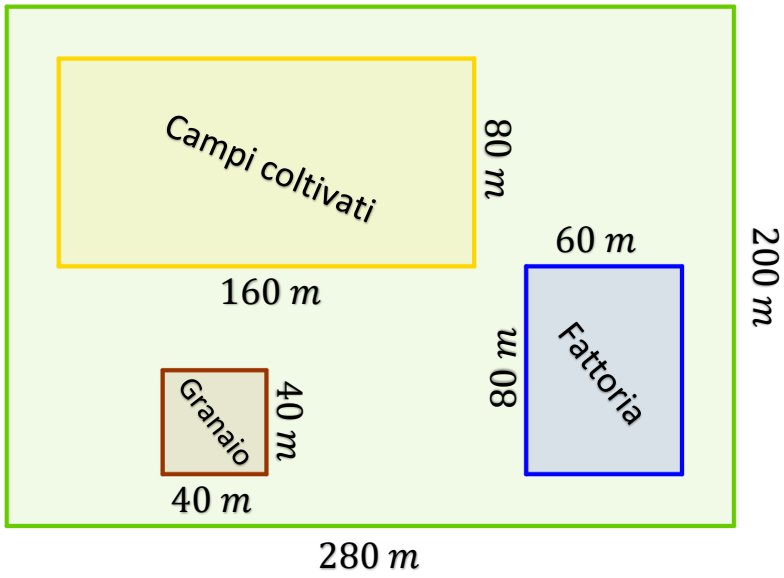
Risposta: .....
.....
.....

Esercizio 2 (da una serie di esercizi sulle aree): Supponi di chiudere gli occhi e di puntare la matita casualmente nel rettangolo verde illustrato qui sotto. Supponendo di essere sicuro di colpire un punto all'interno del rettangolo e che ognuno dei suddetti punti abbia la stessa probabilità di essere colpito, qual è la probabilità di toccare l'interno del quadrato rosso?



Probabilità: .....

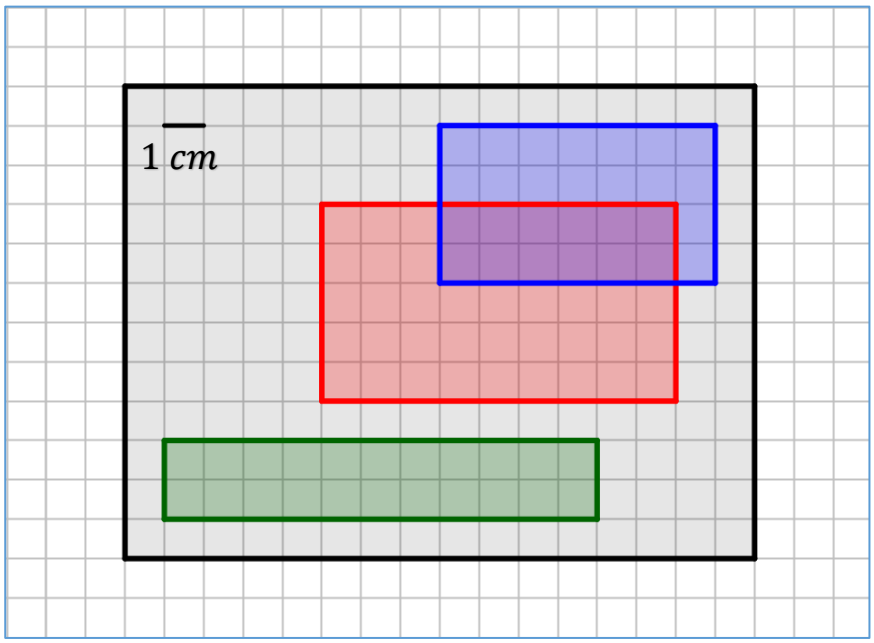
Esercizio 3 (dalla quinta verifica formativa): Un piccolo meteorite cade nella piccola proprietà del contadino Beppe.



Sapendo che ogni punto della proprietà ha la stessa probabilità di essere colpito, calcola:

- La probabilità che venga colpita la fattoria. .....
- La probabilità che venga colpito il granaio o i campi coltivati. .....

Esercizio 4 (dalla quinta verifica sommativa): Determina le aree dei rettangoli illustrati nella zona quadrettata qui sotto.



A_{grigia} = ...

A_{blu} = ...

A_{rossa} = ...

A_{verde} = ...

Immagina ora di chiudere gli occhi e di puntare una matita casualmente nel rettangolo grigio. Sapendo che ogni punto del rettangolo grigio avrà la stessa probabilità di essere toccato, esprimi la probabilità che…

a) … venga toccato il rettangolo rosso. .....

b) … venga toccato il rettangolo verde. .....

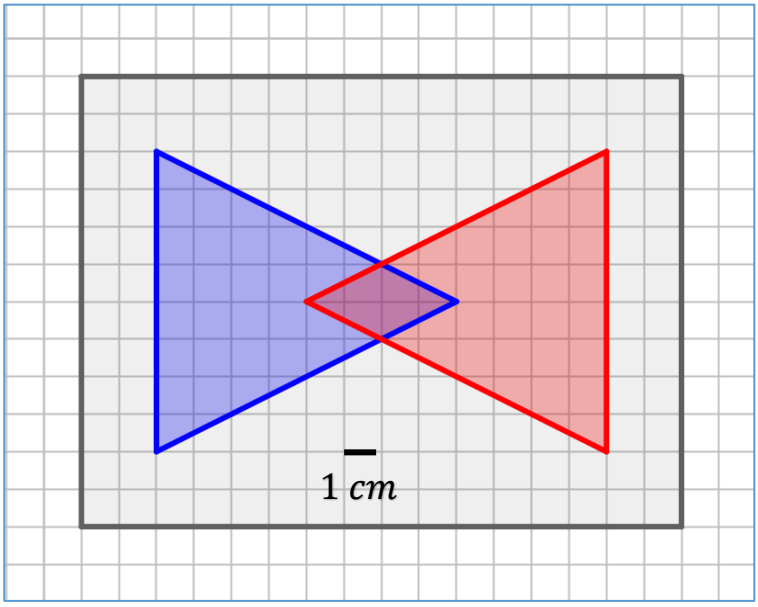
c) … venga toccato sia il rettangolo blu che quello rosso. .....

d) … venga toccato il rettangolo blu oppure quello verde. .....

e) … venga toccato sia il rettangolo rosso che quello verde. .....

f) … venga toccato il rettango blu <u>sapendo che</u> è stato toccato quello rosso. .....

Esercizio 5 (dalla settima verifica sommativa): Nella zona quadrettata qui sotto puoi vedere un rettangolo grigio contenente due triangoli, uno blu e uno rosso, che si intersecano. La zona in cui si intersecano ha la forma di un rombo viola. Determina le aree richieste.



A_{grigia} = ...

A_{blu} = ...

A_{rossa} = ...

A_{viola} = ...

Immagina ora di chiudere gli occhi e di puntare una matita casualmente nel rettangolo grigio. Sapendo che ogni punto del rettangolo grigio avrà la stessa probabilità di essere toccato, esprimi la probabilità che…

a) … venga toccato il triangolo blu. .....

b) … venga toccato sia il triangolo blu che quello rosso. .....

c) … venga toccato il triangolo blu oppure quello rosso. .....

d) … non venga toccato il triangolo rosso .....

e) … non venga toccato nessuno dei triangoli. .....

f) … venga toccato il triangolo blu <u>sapendo che</u> è stato toccato quello rosso. .....

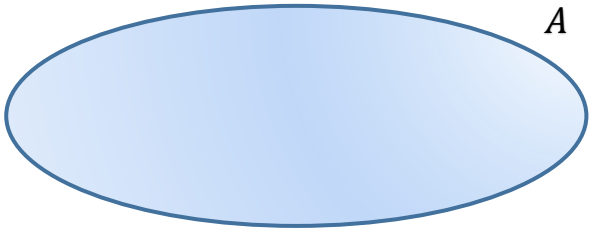
Nome e cognome: …….

Diagnostica: il linguaggio degli insiemi

Esericizio 1

Sia A l'insieme di tutti i numeri pari più piccoli o uguali a 10. Rappresenta A per estensione e mediante un diagramma di Eulero-Venn.

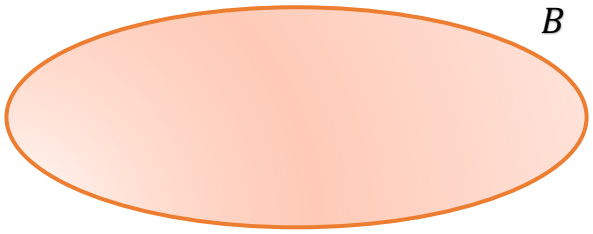
$A = \{ \dots ; \dots ; \dots ; \dots ; \dots ; \dots \}$



Esercizio 2

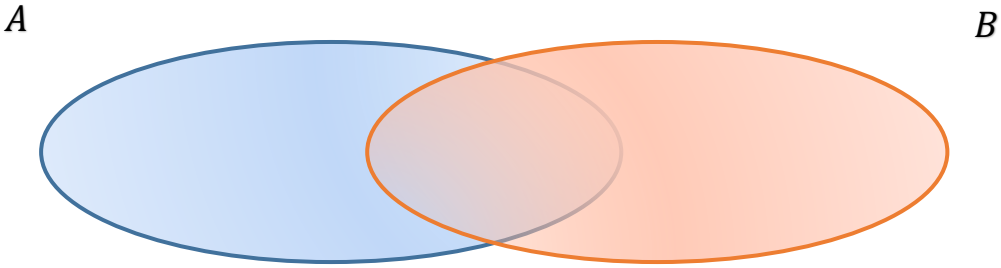
Sia B l'insieme di tutti i numeri maggiori o uguali a 5 e strettamente minori di 12. Rappresenta B per elencazione e mediante un diagramma di Eulero-Venn.

$B = \{ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \}$



Esercizio 3

Unisci i due diagrammi degli esercizi precedenti in un unico disegno (ogni numero non può apparire più di una volta).



Esercizio 4

Sia C l'insieme dei numeri che appartengono all'insieme A **e** all'insieme B.
Sia invece D l'insieme dei numeri che appartengono all'insieme A **o** all'insieme B.
Rappresenta C e D per estensione.

$C = \{ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \}$ $D = \{ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \}$

Esercizio 5

Completa gli spazi vuoti scegliendo il simbolo più appropriato tra " $\in$ " (appartiene a) e " $\notin$ " (non appartiene a). Gli insiemi A, B, C e D sono quelli degli esercizi precedenti.

$2 \dots A$, $5 \dots B$, $15 \dots A$, $7 \dots B$, $8 \dots C$, $1 \dots D$, $9 \dots C$

Supponi ora che il generico numero $x \in C$. Completa gli spazi vuoti con i simboli di appartenenza.

$x \dots A$, $x \dots B$, $x \dots D$

Esercizio 6

Sia X l'insieme dei numeri naturali x che soddisfino le seguenti disuguaglianze.

$$2 < x \leq 11$$

Sia poi Y l'insieme dei numeri dispari compresi tra 6 e 10.

Rappresenta per estensione i due insiemi X e Y.

$X = \{$ .....$\}$ $Y = \{$ .....$\}$

Rappresentali ora con dei diagrammi di Eulero-Venn in un unico disegno (come per l'esercizio 3).

Esercizio 7

Sia M l'insieme dei numeri che appartengono all'insieme X **e** all'insieme Y.

Sia invece N l'insieme dei numeri che appartengono all'insieme X **o** all'insieme Y.

Cosa puoi dire degli insiemi M ed N? .....

Sia infine Z l'insieme dei numeri che appartengono ad X, **ma non** ad Y. Rappresentalo per estensione: $Z = \{$ .....$\}$

Qual è la probabilità che, scegliendo a caso un elemento di X, esso appartenga a Y?..... E a Z? .....